Содржина

Предговор

Оваа книга е специјално дизајнирана за студенти на инженерските факултети, студенти кои сакаат да стекнат познавање на теоретските основи на математиката, но и да научат да применуваат различни математички концепти. Примарната цел на оваа книга е да обезбеди математичка основа и елементарна математичка писменост, моменти кои се клучни во развојот на еден инженер. Може да биде користена како почеток во математичката едукација на студентот и обезбедува добра основа од теоретски како и добра база од практични проблеми од инженерската математика.

Книгата е поделена на неколку поглавја, од кои секое се фокусира на одредена тема од големо значење во инженерската математика. Опфатените теми вклучуваат детерминанти, матрици, вектори, системи линеарни равенки, аналитичка геометрија во простор, функции од две променливи, двојни интеграли и нивна примена. Овие теми се внимателно избрани за да се осврнат на основните математички концепти кои се во основата на многу инженерски дисциплини, а исто така и комплетно го покриваат материјалот кој е во наставната програма за предметот Математика 2 на Технолошко-металуршкиот факултет при универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје. Книгата е плод на повеќегодишни предавања на авторите по предмети од областа математика на три ралични инженерски факултети.

За да се обезбеди сеопфатно разбирање на предметот, секое поглавје започнува со теоретска позадина, објаснувајќи ги основните математички принципи и концепти. Во секое поглавје се вклучени бројни решени примери кои се внимателно избрани за да покриваат широк опсег на нивоа на тежина, овозможувајќи Ви постепено да ги подобрувате вашите вештини за решавање проблеми. Каде што е потребно решенијата на проблемите се придружени со слики кои дополнително помагаат во визуелизирањето и разбирањето на посложените проблеми.

Покрај решените проблеми, оваа книга дава и збирка на нерешени проблеми на крајот од секое поглавје. Овие проблеми Ви даваат можност да се предизвикате себеси и да го примените знаењето што сте го стекнале. Голем дел од решените и нерешените задачи и проблеми биле предложени по испитни комбинации на сите програми на Технолошко-металуршкиот факултет.

Се надеваме дека оваа книга ќе Ви помогне во совладување на основите на инженерската математика. Без разлика дали студирате на Технолошко - металуршкиот факултет, за чии студенти е првично наменета, на некој од другите инженерски факултети, или пак самостојно ја читате, Ве охрабруваме да пристапите на секоја тема со љубопитност и ентузијазам. Запомнете, математиката не е само предмет што треба да се научи; таа е јазик кој ги овластува инженерите да го обликуваат светот околу нас.

Би сакале да ја изразиме нашата благодарност до рецензентите на оваа книга. Со нивната посветеност, забелешки и препораки значително придонесоа за нејзината конечна форма. Исто така, ја изразуваме нашата благодарност до читателите чии повратни информации и предлози ќе ни помогнат да ги усовршиме и подобриме идните изданија.

Од Авторите.

Глава 1

Детерминанти

1.1 Детерминанти од произволен ред

Детерминанти од прв ред. Нека a_{11} е произволен објект (број, параметар, функција, ...). Под *детерминанта* на објектот a_{11}, ја означуваме со $\triangle_1$, се подразбира вредноста $\triangle_1 = a_{11}$.

Детерминанти од втор ред. Нека a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} се истородни објекти, распоредени во две редици и две колони така што a_{ij} е во пресекот на редицата i и колоната j (за секои $i, j \in \{1, 2\}$). Под *детерминанта* на така распоредените објекти a_{ij} $(i, j \in \{1, 2\})$ се подразбира вредноста $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Истата ја означуваме со:

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.1.1}$$

Детерминанти од трет ред. Нека a_{ij} за $i, j \in \{1, 2, 3\}$ се истородни објекти, распоредени во три редици и три колони така што a_{ij} е во пресекот на редицата i и колоната j (за секои $i, j \in \{1, 2, 3\}$). Под *детерминанта* на така распоредените објекти a_{ij} $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ се подразбира вредноста

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \tag{1.1.2}$$

Истата ја означуваме со:

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.1.3}$$

Детерминанти од n-ти ред. Нека a_{ij} за $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 2$ се истородни објекти. Притоа, двојниот индекс ij означува дека објектот a_{ij} се наоѓа во пресекот на i-та редица и j-та колона. Под *детерминанта* на тие објекти, со ознака:

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

се подразбира вредноста дефинирана рекурентно со:

$$\triangle_n = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Да забележиме дека претходната формула претставува збир од n собироци, при што секој собирок е производ на елемент од првата редица (a_{1j}, $1 \leq j \leq n$) со $(-1)^{1+j}$ и на детерминанта од ред $n-1$. Во секој собирок, степеновиот показател на -1 е збир на индексите на соодветниот објект a_{1j}, а користената детерминанта од ред $n-1$ се добива од детерминантата $\triangle_n$ со елиминирање на првата редица и j-тата колона (соодветно на a_{1j}). Горенаведената дефиниција за вредноста на $\triangle_n$ се заснова на т.н. „развивање по прва редица“.

Како што веќе споменавме, објектите во детерминантите можат да бидат броеви, променливи, вектори итн.; напоменуваме дека е значајно тоа да се објекти над кои се дефинирани операциите $+$ и $\cdot$, при што операцијата $\cdot$ е дистрибутивна во однос на операцијата $+$. (Имено, во индуктивната дефиниција на детерминанта, потребна е дистрибутивност при намалувањето на редот на детерминантата). За множеството објекти дополнително претпоставуваме дека е затворено во однос на споменатите две операции. Вредноста на детерминанта, соодветно на објектите во неа, може да биде број, полином, вектор итн. Од наш интерес се детерминантите над множеството објекти $\mathbb{R}$ (реални броеви) или $\mathbb{R}^3$ (вектори). Споменатите две множества ги поседуваат сите особини потребни за дефиницијата на детерминанта да биде добро осмислена.

Овој воведен параграф го комплетираме со поимите за *главна дијагонала* и *споредна дијагонала* на детерминанта $\triangle_n$. Главнатата дијагонала ја сочинуваат објектите a_{ij} такви што $1 \leq i = j \leq n$ (т.е. сите објекти a_{ii}), а споредната дијагонала ја сочинуваат објектите a_{ij} за кои $i + j = n + 1$, $i, j \in \mathbb{N}$.

1.2 Пресметување детерминанти

Сарусово правило. Ова правило се однесува само на пресметување на детерминантите од трет ред. Ја разгледуваме проширената детерминанта (добиена со допишување на првите две колони од десната страна на првичната детерминанта). Имено,

$$\triangle_3 = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|, \tag{1.2.1}$$

каде со „$\ldots$“ е означена операција множење. Ги пресметуваме производите на тројките (x, y, z) од објекти кои се поврзани со $\ldots$ во иста боја (шест на број, три црвени и три сини, види (1.2.1)). Производите кои одговараат на сино обоените $\ldots$ се множат со -1. Така добиените шест производи се собираат, со што се добива формулата (1.1.2) за пресметување на детерминантата од трет ред:

$$\triangle_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минори. Нека a_{ij}, за $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 2$, се произволни објекти, и

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \color{red}{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \color{red}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{\ldots} & \color{red}{a_{ij}} & \color{red}{\ldots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \color{red}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \color{red}{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минор M_{ij}, што соодветствува на a_{ij}, е следната детерминанта од ред $n-1$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.2}$$

Црвеноозначените објекти во $\triangle_n$, односно објектите од i-та редица и j-та колона, се бришат при формирањето на M_{ij}. Забележуваме дека во формулата за пресметување на детерминантата од n-ти ред, користените детерминанти од $(n-1)$-ви ред се токму минорите на елементите од првата редица, односно

$$\triangle_n = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \ldots (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}. \tag{1.2.3}$$

Задача 1. Пресметај ја детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1/4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3-\sqrt{2} & -5-\sqrt{7} \\ -5+\sqrt{7} & 3+\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \sin 45^o \\ \cos 45^o & \log_3 9 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$, каде $\varphi \in \mathbb{R}$;

д) $\begin{vmatrix} \sin\varphi + \sin\phi & \cos\varphi + \cos\phi \\ \cos\phi - \cos\varphi & \sin\varphi - \sin\phi \end{vmatrix}$, каде $\varphi, \phi \in \mathbb{R}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{4} - (-2) \cdot 3 = \frac{25}{4}$.

б) $\begin{vmatrix} 3-\sqrt{2} & -5-\sqrt{7} \\ -5+\sqrt{7} & 3+\sqrt{2} \end{vmatrix} = (3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) - (-5-\sqrt{7})(-5+\sqrt{7}) = -11.$

в) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \sin 45^o \\ \cos 45^o & \log_3 9 \end{vmatrix} = \log_3 9 \cdot \log_9 3 - \sin 45^o \cdot \cos 45^o = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

г) $\begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \sin\varphi \cdot \sin\varphi - (-\cos\varphi) \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$

д)

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi+\sin\phi & \cos\varphi+\cos\phi \\ \cos\phi-\cos\varphi & \sin\varphi-\sin\phi \end{vmatrix} =$$
$$= (\sin\varphi+\sin\phi)(\sin\varphi-\sin\phi)-(\cos\varphi+\cos\phi)(\cos\phi-\cos\varphi)$$
$$= \sin^2\varphi-\sin\varphi\sin\phi+\sin\phi\sin\varphi-\sin^2\phi-\cos\varphi\cos\phi+\cos^2\varphi-\cos^2\phi+\cos\phi\cos\varphi$$
$$= \sin^2\varphi+\cos^2\varphi-(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=0.$$

Задача 2. Реши ја следната равенка во $\mathbb{R}$:

а) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

б) $\left(\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}\right)^2 - \begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

в) $\left(\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}\right)^3 = 1.$

Решение. а) Од $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = x^2-1-x^2-2x = -2x-1$ ја добиваме равенката $-2x-1=0$, чие решение е $x=-1/2$.

б)

$$\left(\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}\right)^2 - \begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$
$$\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}\left(\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} - 1\right) = 0 \iff$$
$$\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 1.$$

Првиот случај е веќе решен (оваа задача под а)). Да го решиме вториот случај:

$$1 = \begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)-x(x+2)$$
$$1 = -2x-1,$$

или $x=-1$. Значи, решенија на дадената равенка се: $x=-1/2$ и $x=-1$.

в) Нека $\triangle = \begin{vmatrix} x-1 & x \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}$. Тогаш равенката има облик $\triangle^3 = 1$, односно $(\triangle - 1)(\triangle^2 + \triangle + 1) = 0$. Бидејќи $\triangle^2 + \triangle + 1 = (\triangle + 1/2)^2 + 3/4 > 0$, следува дека $\triangle = 1$. Решението се сведува на вториот случај од оваа задача под б), па така $x = -1$ е единствено решение на равенката.

Задача 3. Пресметај ја детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 2 & 2 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-1 & \dots & & n-1 & 0 \\ n & \dots & & n & n \end{vmatrix}$.

Решение. а) Ја развиваме детерминантата по првата редица и добиваме:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r_1 \end{matrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

б) За оваа детерминанта го применуваме Сарусовото правило:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 & 7 & 7 \end{array}\right|$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 7 - 3 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 7 - 1 \cdot 4 \cdot 9 = 0.$$

Да забележиме дека во случајот а) една редица е составена само од нули, додека во случајот б) две колони се исти. Во двата случаја вредноста на детерминантата е 0.

в) Со развивање по првата редица добиваме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r_1 \end{matrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

д) Дадената детерминанта има карактеристична особина. Имено, сите елементи над главната дијагонала се еднакви на 0. (За детерминанта со оваа особина велиме дека е *долно-триаголна*.) Нејзината вредност е производ на елементите од главната дијагонала. Навистина,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 2 & 2 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-1 & \dots & & n-1 & 0 \\ n & \dots & & n & n \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r_1 \end{matrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & & \dots & 0 \\ 3 & 3 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-1 & \dots & & n-1 & 0 \\ n & \dots & & n & n \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ r_1 \end{matrix} = \dots$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

1.3 Својства на детерминанти

Нека n е природен број поголем од 1. Со принципот на математичка индукција (по n) може да се докажат следните својства за детерминанта од ред n.

(*i*) Вредноста на детерминантата $\triangle_n$ не се менува доколку редиците и колоните си ги заменат местата, односно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Како последица, сите тврдења во понатамошниот текст се однесуваат на редици и на колони.

(*ii*) Ако сите елементи на една редица (колона) се 0, тогаш $\triangle_n = 0$. (Види ја задачата 3.)

(*iii*) Ако две редици (колони) си ги заменат местата, тогаш вредноста на новата детерминанта е $-\triangle_n$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots\dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots\dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots\dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots\dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Како последица на ова својство се добива дека ако две редици (колони) се еднакви, тогаш $\triangle_n = 0$. (Ова својство е илустрирано во б) од задачата 3.)

(*iv*) Ако елементите на една редица (колона) се помножат со константа k, тогаш вредноста на новата детерминанта изнесува $k\triangle_n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \ldots\ldots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots\ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Како последица на ова својство и својството 3) се добива дека ако две (или повеќе) редици (или колони) во $\triangle_n$ се пропорционални, тогаш вредноста на детерминантата е 0.

(*v*) Ако елементите на една редица (колона) се помножат со константа k и се додадат на друга редица (колона), тогаш вредноста на детерминантата не се менува: за $j \neq i$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & \ldots\ldots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & ka_{1j}+a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & ka_{ij}+a_{ii} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & ka_{nj}+a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(*vi*) Нека $1 \leq i, j \leq n$. Под *развивање по i-та редица* на $\triangle_n$ се подразбира идентитетот:

$$\triangle_n = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}. \qquad (1.3.1)$$

Аналогно, *развивање по j-та колона* на $\triangle_n$ е идентитетот:

$$\triangle_n = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \dots (-1)^{nj}a_{nj}M_{nj}. \qquad (1.3.2)$$

Овде M_{ij} се минорите дефинирани со формулата (1.2.2). Оваа особина е последица од дефиницијата на $\triangle_n$ и својството 3).

Задача 4. Реши ја задачата 3, користејќи ги својствата на детерминантите.

Задача 5. Пресметај ја вредноста на детерминантата за $x, y, z, k, r, s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ kx & ky & kz \\ r & s & t \end{vmatrix}.$$

Решение. Да забележиме дека првата и втората редица се пропорционални со коефициент k. Затоа, од втората редица ја одземаме првата редица помножена со k. Користиме ознака $\rightarrow$ за трансформацијата по редици и колони, $\uparrow$ за развивањето на детермнинантата по дадената редица или колона. Нотацијата која ќе ја користиме за ваквите трансформации е: $-kr_1 + r_2 \rightarrow r_2$, што значи дека на местото на втората редица ќе стои „новата“ трансформирана редица, односно на елементите на втората редица ги додаваме соодветните елементи од првата редица претходно помножени со $-k$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ kx & ky & kz \\ r & s & t \end{vmatrix}_{-kr_1+r_2 \rightarrow r_2} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 6. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Дадената детерминантата се нарекува *горно-триаголна* (карактеристичната особина е дека секој елемент под главната дијагонала е 0). Аналогно, дефинираме поим за долно-триаголна детерминанта во задачата 3. д).

Решение. Детерминантата во секој чекор ја разложуваме по прва колона од каде што добиваме дека $\triangle_n = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, односно производот на елементите од главната дијагонала.

Задачите 3. д) и 6. искажуваат ново својство на детерминантите.

(*vii*) За триаголните детерминанти важи:

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

и:

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Задача 7. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2r_3 + r_1 \to r_1 \\ 2r_3 + r_2 \to r_2 \\ \\ r_3 + r_4 \to r_4 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \uparrow \\ k_1 \\ \end{array}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 3r_1 + r_2 \to r_2 \\ -3r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ k_1 \\ \end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ r_1 + r_2 \to r_2 \end{array} = -\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Да напомeнеме дека овој метод може да се користи во комбинација со Сарусовото правило. Со помош на трансформациите по редици може детерминантата да се сведе на горно-триаголна, односно

$$\triangle_4 = -\begin{vmatrix} 1 & * & & * \\ 0 & -1 & * & \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Во второто решение е користена задачата 6.

Задача 8. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Упатство. Додадете ги сите редици (колони) на првата редица (колона). Ќе добиете редица (колона) со сите елементи бројот 14. Потоа поделете ја редицата (колоната) со вредноста што се појавува на секое место од таа редица (колона). Вредноста на детерминантата е $14 \cdot 4^4$.

1.4 Дополнителни задачи

Задача 9. Пресметај ја вредноста на детерминантата: $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Задача 10. Пресметај ја детерминантата: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

а) со Сарусовото правило;

б) со сведување на триаголен облик (со пивотирање).

Задача 11. Пресметај ја детерминантата:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

со:

а) сведување во горно-триаголна форма;

б) разложување по прва редица;

в) разложување по втора колона.

Задача 12. Реши ја квадратната равенка:

$$\begin{vmatrix} 3 & t & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Задача 13. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задача 14. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Глава 2

Вектори

2.1 Дефиниција и својства

Вектори се величини (геометриски објекти) кои можат да се карактеризираат со нивната големина, правец и насока. Вообичаено, ги означуваме со мали букви од латинската азбука над кои запишуваме $\rightarrow$: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Од друга страна, скаларите (реалните броеви) ги означуваме со мали букви од грчката азбука: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$. Векторите можат да се собираат ($\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \ldots$) и можат да се скалираат, т.е. да се множат со произволна константа ($\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \lambda(\vec{a}+\vec{b}), \ldots$). Векторите вообичаено ги претставуваме како насочени отсечки. Имено, векторот $\overrightarrow{PQ}$ го претставуваме како отсечка која има почетна точка P и крајна точка Q. Должината $\overline{PQ}$ на отсечката PQ се нарекува *должина* (алтернативно, *модул* или *интензитет*) на векторот $\overrightarrow{PQ}$; се означува со $|\overrightarrow{PQ}|$. По дефиниција, две насочени отсечки во просторот, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{P'Q'}$, се претставувања на ист вектор доколку четириаголникот $PQQ'P'$ е паралелограм. За произволна точка O и даден вектор $\vec{a}$, постои единствена точка A, таква што насочената отсечка $\overrightarrow{OA}$ е претставување на векторот $\vec{a}$. Во тој поглед, велиме дека векторот $\vec{a}$ сме го *нанесле* во точката O.

Во текстот што следува, најпрво е разгледан општиот случај на вектор, а потоа специјалниот облик на вектор во $\mathbb{R}^n$, односно во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Причината за последново лежи во едноставната геометриска интерпретација, векторите во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ можат да се претстават како подредени парови, односно тројки од реални броеви. За векторите од $\mathbb{R}^2$ ќе ја користиме нотацијата $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$. Аналогна нотација ќе користиме и за векторите во $\mathbb{R}^3$.

За општиот случај имаме:

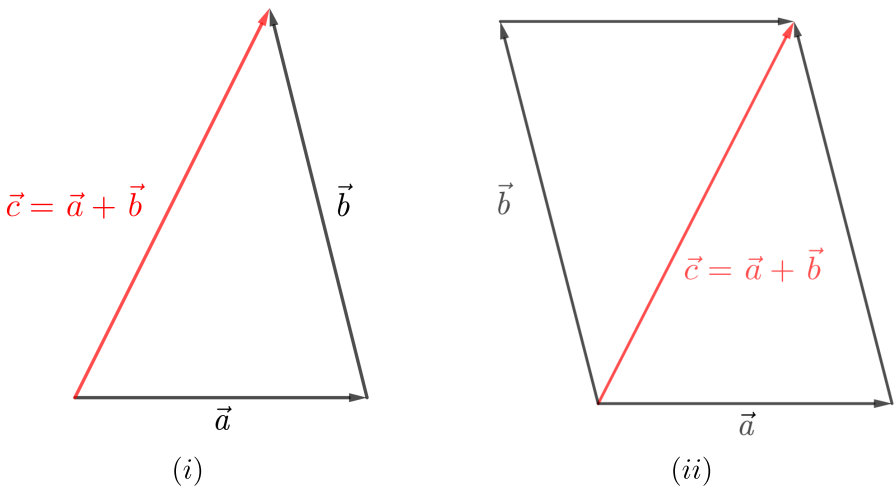
(*i*) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се еднакви ако имаат еднаква должина $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, ист правец $\vec{a}||\vec{b}$ (т.е. $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ за некој $\lambda \in \mathbb{R}$) и имаат иста насока (т.е. $\lambda > 0$ во равенството за паралелност).

(*ii*) Векторот $-\vec{a}$ е вектор што има ист модул и ист правец, но спротивна насока од векторот $\vec{a}$. Го нарекуваме *спротивен* на векторот $\vec{a}$. Ако $\overrightarrow{AB}$ е претставување на $\vec{a}$, тогаш $\overrightarrow{BA}$ е претставување на $-\vec{a}$.

(*iii*) Збир $\vec{a} + \vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор $\vec{c}$ добиен на следниот начин:

- **Правило на триаголник.** Избираме произволно претставување на векторот $\vec{a}$ како насочена отсечка $\overrightarrow{OA}$. Крајната точка на векторот $\vec{a}$ се избира за почетна точка на векторот $\vec{b}$, т.е., избираме претставување $\overrightarrow{AB}$ на $\vec{b}$. Векторот $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ е претставен со насочената отсечка $\overrightarrow{OB}$, т.е., има иста почетна точка со $\vec{a}$ и иста крајна точка со $\vec{b}$. Напоменуваме дека насоката на збирот $\vec{c}$ е од почетокот на $\vec{a}$ кон крајот на $\vec{b}$. (Забележете дека оваа дефиниција на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ е добра во смисла дека не зависи од почетниот избор на точката O.)
- **Правило на паралелограм.** Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нанесуваат во иста почетна точка O, нека $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Векторот $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ е претставен со дијагоналата $\overrightarrow{OC}$ на паралелограмот $OACB$ формиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Почетна точка на $\vec{c}$ е заедничката почетна точка на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Забележете дека и оваа еквивалентна дефиниција на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ е добра, но е осмислена само за вектори кои немаат ист правец.)

Од самата дефиниција на збирот на вектори следува дека се работи за комутативна и асоцијативна операција.



Слика 2.1: Собирање според правилото на: (i) триаголник (ii) паралелограм. Забележете дека дефинициите се еквивалентни за произволни непаралелни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(iv) Векторот $\vec{0}$ е збир на векторите $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, за произволен вектор $\vec{a}$. Велиме дека $\vec{0}$ е *нулти вектор*. Тој е неутрален во поглед на собирање на вектори, т.е., важи $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

(v) Разликата $\vec{a} - \vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. На пример, $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$ и $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$.

(vi) Векторот $k\vec{a}$, каде што $k \in \mathbb{R}$, е вектор што е паралелен на векторот $\vec{a}$ со модул $|k||\vec{a}|$ и има насока:

- иста со насоката на $\vec{a}$, кога $k > 0$;
- спротивна на насоката на $\vec{a}$, кога $k < 0$;
- е нултиот вектор $\vec{0}$, кога $k = 0$.

Забележете дека $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ и дека $k\vec{0} = \vec{0}$. Всушност, $k\vec{a} = \vec{0}$ ако и само ако $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

За специјален избор на вектори $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ во $\mathbb{R}^n$ имаме:

Координатни форми на дефинициите.

(i) Равенството $\vec{a} = \vec{b}$ важи ако и само ако: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

(ii) Збирот $\vec{a} + \vec{b}$ е векторот: $\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$.

(iii) Разликата $\vec{a} - \vec{b}$ е векторот: $\begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$.

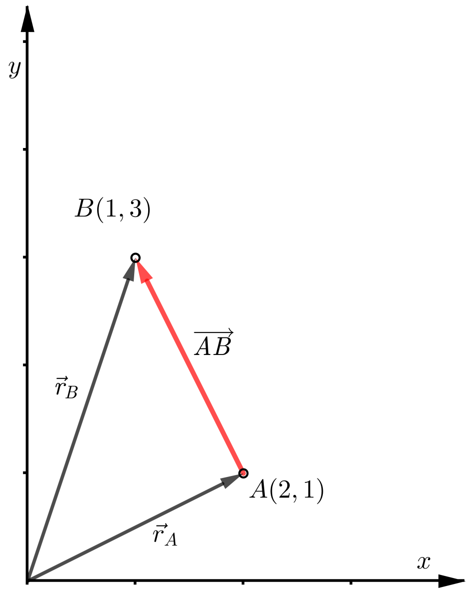
(iv) Производот $k\vec{a}$ е векторот: $[\ ka_1 \quad ka_2 \quad \ldots \quad ka_n\ ]^T$.

(v) Модулот $|\vec{a}|$ на векторот $\vec{a}$ е растојанието од координатниот почеток $(0, 0, \ldots, 0)$ до точката со координати $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Притоа, важи $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ (Питагорина теорема). Специјално, за векторот $\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2\ ]^T$ важи $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Слично, за $\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ]^T$ важи $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

(vi) За произволна точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ векторот $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ го нарекуваме *радиус-вектор* и го означуваме со $\vec{r_A}$.

Задача 15. Дадени се точките $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. Најди координатна форма на векторот $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Радиус-векторот $\vec{r_A}$ на точката A, т.е. векторот кој ја определува позицијата на точката A, во овој случај е $\vec{r}_A = [\ 2 \quad 1\ ]^T$. Радиус-векторот $\vec{r_B}$ на точката B е $\vec{r}_B = [\ 1 \quad 3\ ]^T$. Тогаш, векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = [\ -1 \quad 2\ ]^T$ (види ја сликата 2.2).



Слика 2.2: Радиус-векторите $\vec{r_A}$ и $\vec{r_B}$ во задачата 15.

Решението на претходната задача го илустрира следниов општ заклучок:

> Ако точките A и B се зададени со $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$, тогаш:
>
> $$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix}.$$

Задача 16. Дадени се точките $A(0,1,2)$, $B(3,2,1)$. Пресметај го векторот $\overrightarrow{AB}$ и неговиот модул.

Решение. За векторот $\overrightarrow{AB}$ важи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [\ 3 \quad 2 \quad 1\ ]^T - [\ 0 \quad 1 \quad 2\ ]^T = [\ 3 \quad 1 \quad -1\ ]^T$, а за неговиот модул

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Задача 17. Нека точките A, B и C се темињата на $\triangle ABC$. Пресметај: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Решение. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Задача 18. Дадени се векторите

$$\vec{a}=[\ 1\quad 0\quad 1\ ]^T,\ \ \vec{b}=[\ 0\quad 1\quad 2\ ]^T \text{ и } \vec{c}=[\ -1\quad -1\quad 3\ ]^T.$$

Пресметај: $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},2\vec{c},-2\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},|\vec{c}|,|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|,\ 2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$.

Задача 19. Точките $A(0,1,2),B(2,0,1)$ и $C(3,1,0)$ се темиња на паралелограм $ABCD$. Најди ги координатите на четвртото теме D. Најди го пресекот на дијагоналите O.

Решение. Нека $D(x,y,z)$. Од дефинирачките својства на паралелограм и вектор, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, односно

$$[\ 2\quad -1\quad -1\ ]^T=[\ 3-x\quad 1-y\quad -z\ ]^T.$$

Следствено, $2=3-x$, $-1=1-y$, $-1=-z$ и оттука $D(1,2,1)$. Во секој паралелограм дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка. Значи, ако $O(x^*,y^*,z^*)$ е пресечната точка, тогаш $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, односно

$$[\ x^*\quad y^*-1\quad z^*-2\ ]^T=[\ 3-x^*\quad 1-y^*\quad -z^*\ ]^T.$$

Следува дека: $x^*=3/2$, $y^*=1$, $z^*=1$.

> Генерално, ако точката $O(o_x,o_y,o_z)$ ја преполовува отсечката AB, каде што $A(a_x,a_y,a_z)$ и $B(b_x,b_y,b_z)$, тогаш
>
> $$o_x=\frac{a_x+b_x}{2},\ o_y=\frac{a_y+b_y}{2},\ o_z=\frac{a_z+b_z}{2}.$$

2.2 Скаларен производ

Нека $\vec{a},\vec{b}$ се два ненулти вектори во $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Под *агол* $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ меѓу векторите $\vec{a},\vec{b}$ се подразбира помалиот од двата агли што ги зафаќаат правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Со други зборови, ако O е произволна точка и $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, тогаш постојат два агли со теме во точката O и краци долж полуправите OA и OB. Овие два агли заедно формираат полн агол, и помалиот меѓу нив е токму $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

Да забележиме дека оваа дефиниција е добра, т.е., не зависи од изборот на точката O. Во согласност со дефиницијата, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ е реален број од сегментот $[0,\pi]$

(при аголна мера радијан). Со оглед на тоа дека $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ е биекција, за определување на $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, доволно е да знаеме колку изнесува $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

Напоменуваме дека: $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \measuredangle(\vec{b},\vec{a})$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{a}) = 0$, $\measuredangle(\vec{a},-\vec{a}) = \pi$.

Под *скаларен производ* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се подразбира бројот:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) & ,\vec{a}\neq\vec{0} \text{ и } \vec{b}\neq\vec{0} \\ 0 & ,\vec{a}=\vec{0} \text{ или } \vec{b}=\vec{0} \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

Во продолжение ги наведуваме основните својства на скаларен производ.

Основни својства.

(*i*) Равенството $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ важи ако и само ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални или барем еден од нив е нултиот вектор.

(*ii*) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

(*iii*) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

(*iv*) $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$.

(*v*) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ и $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Со исклучок на последното од горенаведените основни својства, останатите се непосредни последици од самите дефиниции за агол и за скаларен производ. Последното својство искажува дека операцијата скаларен производ на вектори е дистрибутивна во однос на операцијата собирање вектори.

Координатна форма. Нека $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Тогаш, формулата (2.2.1) се сведува на обликот:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{2.2.2}$$

Навистина, векторот $\vec{b}-\vec{a} = [\ b_1-a_1 \quad b_2-a_2 \quad b_3-a_3\ ]^T$. Тогаш,

$$\begin{aligned} |\vec{b}-\vec{a}|^2 =& (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2 \\ (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) =& a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ & - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3). \end{aligned}$$

Добиваме:

$$|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3),$$

од каде што следува равенката (2.2.2). Во пресметките (првиот ред) е искористена формулата за пресметување модул на вектор даден во координатна форма.

Задача 20. Дадени се векторите $\vec{a} = [\ 1 \quad 0 \quad 3\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ 5 \quad 1 \quad -1\ ]^T$. Пресметај ги скаларниот производ и аголот меѓу $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Од координатната форма на скаларен производ и модул добиваме дека $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 5 + 0\cdot 1 + 3\cdot(-1) = 2$. Слично, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+0^2+3^2} = \sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{5^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{27}$. Од формулата за скаларен производ добиваме

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{30}},$$

односно: $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\dfrac{2}{3\sqrt{30}}$.

Задача 21. Најди единечен вектор што лежи во xoz-рамнината и е заемно нормален со векторот $\vec{v} = [\ 2 \quad 4 \quad 1\ ]^T$.

Решение. Нека $\vec{x} = [\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ]^T$ е бараниот вектор. Бидејќи векторот $\vec{x}$ лежи во xoz-рамнината, тој е нормален со вектрот $\vec{e}_2 = [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]$, односно нивниот скаларен производ е 0. Така имаме:

$$\left\{\begin{array}{ll} |\vec{x}| & = 1 \\ \vec{x}\cdot\vec{e}_2 & = 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{v} & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = 1 \\ x_2 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 0 \end{array}\right.,$$

што се сведува на равенката $x_1^2 + (-2x_1)^2 = 1$. Значи, $x_1 = 1/\sqrt{5}$ или $x_1 = -1/\sqrt{5}$. Соодветно, $x_3 = -2/\sqrt{5}$ или $x_3 = 2/\sqrt{5}$. Заклучуваме дека векторите: $\vec{x}' = [\ 1\sqrt{5} \quad 0 \quad -2/\sqrt{5}\ ]^T$ и $\vec{x}'' = [\ -1\sqrt{5} \quad 0 \quad 2/\sqrt{5}\ ]^T$ го задоволуваат условот на задачата. Уште повеќе, векторите $\vec{x}'$ и $\vec{x}''$ се колинеарни, со еднаков модул и се спротивно насочени.

Задача 22. Пресметај го скаларниот производ на векторите: $\vec{v}_1 = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{v}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$, каде што $|\vec{a}\,| = 1, |\vec{b}\,| = 2$ и $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}\,) = \pi/4$.

Решение. Најпрво пресметуваме дека $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Оттука,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 &= (\vec{a} - 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - 6\vec{b}\cdot\vec{a} + 2\vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= 3|\vec{a}\,|^2 - 7\vec{a}\cdot\vec{b} + 2|\vec{b}\,|^2 = 11 - 7\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Задача 23. Нека $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 7\vec{p} - 5\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 4\vec{q}$ и $\vec{d} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$. Ако $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{c} \perp \vec{d}$, тогаш пресметај го аголот меѓу $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Решение. Условите $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{c} \perp \vec{d}$ имплицираат $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$. Од друга страна, имаме:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{p} + 3\vec{q})(7\vec{p} - 5\vec{q}) = 7|\vec{p}|^2 + 16\vec{p} \cdot \vec{q} - 15|\vec{q}|^2, \tag{2.2.3}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (\vec{p} - 4\vec{q})(7\vec{p} - 2\vec{q}) = 7|\vec{p}|^2 - 30\vec{p} \cdot \vec{q} + 8|\vec{q}|^2, \tag{2.2.4}$$

Од равенките (2.2.3) и (2.2.4) следува:

$$0 = 7|\vec{p}|^2 + 16\vec{p} \cdot \vec{q} - 15|\vec{q}|^2 = 7|\vec{p}|^2 - 30\vec{p} \cdot \vec{q} + 8|\vec{q}|^2,$$

од каде што добиваме $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{q}|^2/2$. Заменувајќи го ова во една од равенките (2.2.3) и (2.2.4), заклучуваме дека $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. За бараниот агол имаме

$$\cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{1/2|\vec{q}|^2}{|\vec{q}|^2} = \frac{1}{2},$$

односно: $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$.

Нека векторот $\vec{b}$ го запишеме како збир од два вектори $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$ така што $\vec{b}_1$ е паралелен со векторот $\vec{a}$ и $\vec{b}_2 \perp \vec{a}$. За векторот $\vec{b}_1$ велиме дека е *ортогонална проекција*, $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$, на векторот $\vec{b}$ врз векторот $\vec{a}$.

За ортогоналната проекција важи:

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}. \tag{2.2.5}$$

Задача 24. Нека $\vec{a} = [\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -3 \end{array}]^T$ и $\vec{B} = [\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 5 \end{array}]^T$. Определи:

а) $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$;

б) $\text{proj}_{2\vec{a}}\vec{b}$;

в) $\text{proj}_{\vec{a}}3\vec{b}$.

Решение.Од претходната формула имаме:

а) $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a} = \dfrac{-16}{10}\vec{a} = -\dfrac{8}{5}\vec{a}$;

б) $\text{proj}_{2\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4\vec{a} \cdot \vec{a}}2\vec{a} = \dfrac{-16}{10}\vec{a} = -\dfrac{8}{5}\vec{a} = \text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$;

в) $\text{proj}_{\vec{a}}3\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot 3\vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a} = 3\dfrac{-16}{10}\vec{a} = -\dfrac{8}{5}\vec{a} = 3\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Овој параграф го завршуваме со две основни својства на ортогоналната проекција, со напомена дека второто од долунаведените својства се користи при докажување на дистрибутивноста на скаларниот производ во однос на собирањето:

(*i*) $\mathrm{proj}_{\vec{a}} k \cdot \vec{b} = k \cdot \mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$;

(*ii*) $\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}_1 + \mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}_2$.

2.3 Векторски производ

Векторски производ на два ненулти вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\vec{c}$ со следните карактеризирачки својства:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}\,||\vec{b}\,| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}\,)$,

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат десна тројка вектори (релативната поставеност во просторот им е како на палец, показалец и среден прст од десната рака). Види ја сликата 2.3. За векторскиот производ $\vec{c}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ја користиме ознаката $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Доколку барем еден од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нултиот вектор, тогаш по дефиниција $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Од самата дефиниција за векторски производ на два вектори следуваат:

Основни својства:

i) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;

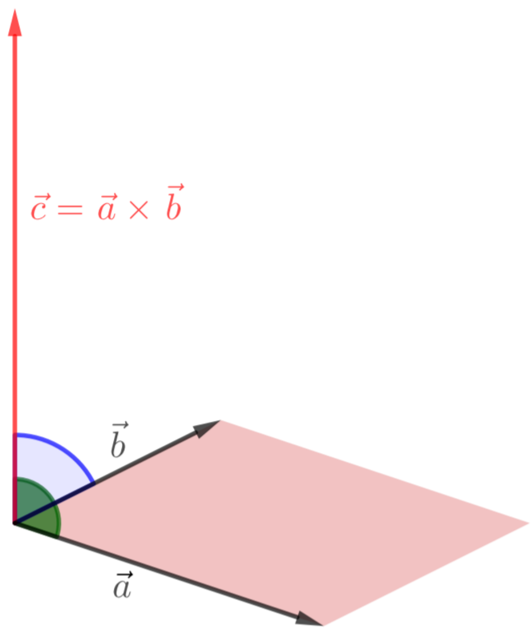
ii) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

iii) $k(\vec{a} \times \vec{b}\,) = (k\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}\,),\ k \in \mathbb{R}$;

iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}\,) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ и $(\vec{a} + \vec{b}\,) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Координатна форма. Векторски производ на векторите

$$\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ]^T \text{ и } \vec{b} = [\ b_1 \quad b_2 \quad b_3\ ]^T$$



Слика 2.3: Векторот $\vec{c}$ е векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

е векторот:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{2.3.1}$$

каде што $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ се единечни вектори со ист правец и насока како позитивните x, y, z-оски, соодветно. Ќе докажеме дека од дефиницијата за векторски производ во координатна форма тој се сведува на обликот (2.3.1). Навистина,

$$\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ]^T = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$
$$\vec{b} = [\ b_1 \quad b_2 \quad b_3\ ]^T = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

од каде што добиваме:

$$\begin{aligned} &[\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ]^T \times [\ b_1 \quad b_2 \quad b_3\ ]^T = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\ &= a_1b_1\ \vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\ \vec{i} \times \vec{j} + a_1b_3\ \vec{i} \times \vec{k} \\ &+ a_2b_1\ \vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\ \vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\ \vec{j} \times \vec{k} \\ &+ a_3b_1\ \vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\ \vec{k} \times \vec{j} + a_3b_3\ \vec{k} \times \vec{k} \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\ \vec{i} \times \vec{j} + (a_1b_3 - a_3b_1)\ \vec{i} \times \vec{k} + (a_2b_3 - a_3b_2)\ \vec{j} \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ формираат десна тројка, па важи:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \;\; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j}, \;\; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}. \tag{2.3.2}$$

Конечно добиваме:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \vec{k} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, \vec{j} + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \vec{i},$$

што е развој по прва редица на детерминантата во равенката (2.3.1).
Аналогна техника може да се користи за докажување на координатната форма на скаларен производ.

Задача 25. Најди вектор којшто е заемно нормален со векторите

$$\vec{a} = [\ 2 \quad -3 \quad 1\ ]^T \text{ и } \vec{b} = [\ -1 \quad 4 \quad 3\ ]^T.$$

Решение. Од дефиницијата за векторски производ имаме дека $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$. Оттаму, еден од векторите кои го задоволуваат условот на задачата е

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = [\ -13 \quad -7 \quad 5\ ]^T.$$

Да забележиме дека сите вектори паралелни со векторот $\vec{c}$ ги исполнуваат условите на задачата. Всушност, доколку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се паралелни, тогаш секој вектор што е заемно нормален и со $\vec{a}$ и со $\vec{b}$, е паралелен со $\vec{a} \times \vec{b}$.

Задача 26. Дадени се векторите: $\vec{a} = [\ 2 \quad 2 \quad -1\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]^T$. Да се определи вектор $\vec{x}$, таков што $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$ и $\vec{x} \times \vec{b} = [\ -1 \quad 0 \quad -1\ ]^T$.

Решение. Нека $\vec{x} = [\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ]^T$. Од условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a} & = 1 \\ \vec{x} \times \vec{b} & = [\ -1 \quad 0 \quad 1\ ]^T \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = 3 \\ \qquad x_3 & = 1 \\ \qquad x_1 & = 1 \end{cases}.$$

Добиваме: $\vec{x} = [\ 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$.

Векторскиот производ на вектори во $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ има своја геометриска интерпретација. Имено,

> Модулот од векторскиот производ на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е еднаков на плоштината на паралелограмот што го определуваат тие вектори.

Задача 27. Пресметај ја плоштината на триаголник чии темиња се точките $A(1,4,1), B(2,1,3)$ и $C(7,2,0)$. Пресметај ја должината на висината во триаголникот спуштена од темето C.

Решение. Плоштината на триаголник може се пресмета со формулата $P = \dfrac{1}{2}ch_c$ каде што c е (должина на) страната c, а h_c е (должина на) висината спуштена од темето C кон страната c. Исто така, плоштината P на триаголникот ABC се пресметува со формулата $P = \dfrac{1}{2}bc\sin\varphi$ каде што b, c се должините на две страни од триаголникот, а φ е аголот што го зафаќаат тие две страни.

Од дефиницијата на векторски производ имаме:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2P \tag{2.3.3}$$

Ги пресметуваме $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [\ 1 \quad -3 \quad 2\ ]^T, \\ \overrightarrow{AC} &= [\ 6 \quad -2 \quad -1\ ]^T, \end{aligned}$$

од каде што:

$$P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 16 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{474}}{2}.$$

Од првата формула за плоштина на триаголник имаме $P = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|h_c$, каде h_c е должината на висината спуштена од темето C.

Конечно, $h_c = \dfrac{2P}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\sqrt{474}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{237}{7}}$.

Задача 28. Пресметај $|\vec{a} \times 2\vec{b}\,|$ ако $|\vec{a}\,| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ и аголот помеѓу овие два вектори е $\pi/4$.

Решение.$|\vec{a} \times 2\vec{b}\,| = |\vec{a}\,||2\vec{b}\,| \sin\measuredangle(\vec{a}, 2\vec{b}\,) = 2|\vec{a}\,||\vec{b}\,| \sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}\,) = 60 \sin\frac{\pi}{4} = 30\sqrt{2}$.

2.4 Мешан производ

Под *мешан производ* на три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се подразбира реален број, го означуваме со $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, определен како скаларен производ на векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е.:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{2.4.1}$$

Координатна форма. Нека $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$. Тогаш мешаниот производ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е еднаков на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Имено, од дефиницијата на мешан производ и координатните форми на векторски и скаларен производ следува дека:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Со примена на својствата на детериnанти (менување на редоследот на редиците два пати) се добива формулата (2.4.2).

2.5 Геометриска интерпретација на детерминати од втор и трет ред

(*i*) Волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ изнесува $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

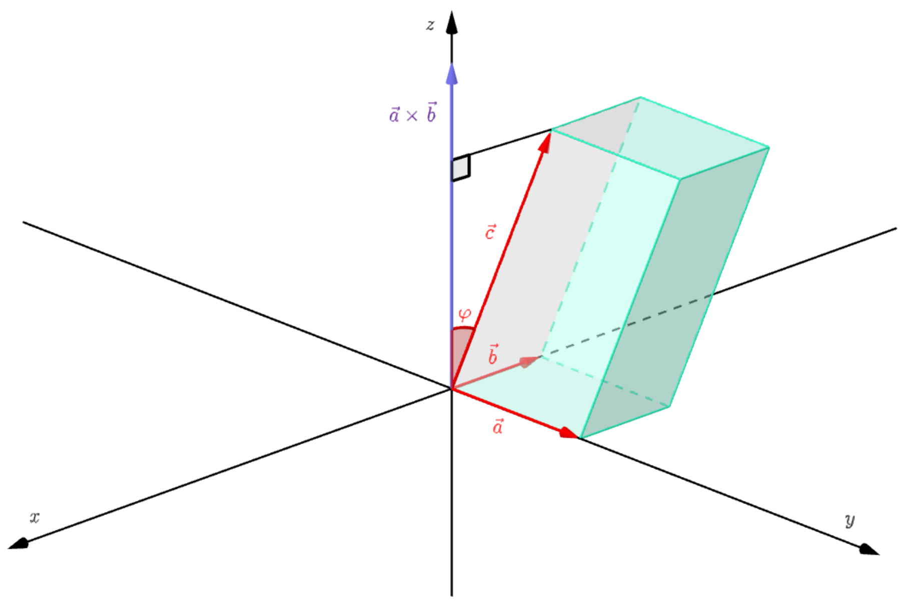
(*ii*) Векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни (нанесени во иста точка ќе лежат во една рамнина) ако и само ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Својството (ii) е директна последица од својството (i). Својството (i) дава геометриска интерпретација на детерминанти од втор и од трет ред, како плоштина и волумен, соодветно. Ова следува од формулата за пресметување волумен на паралелопипед, односно $V = B\,H$, каде што B е плоштината на основата, а H е висината на паралелопипедот. Од геометриската интерпретација на векторски производ, $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$. За висината добиваме $H = |\vec{c}||\cos\varphi|$ (види ја сликата 2.4), каде φ е аголот што $\vec{c}$ го зафаќа со $\vec{a} \times \vec{b}$. Така, за волуменот на паралелопипедот добиваме $V = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Нека $\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ b_1 \quad b_2\ ]^T$ се два вектора во $\mathbb{R}^2$. Тогаш, модулот на нивниот векторски производ е еднаков на плоштината на паралелограмот формиран од $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторите можеме да ги запишеме како $\vec{a} = [\ a_1 \quad a_2 \quad 0\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ b_1 \quad b_2 \quad 0\ ]^T$, односно

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right\| \cdot |\vec{k}| = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right\|.$$

Следствено, апсолутната вредност на детерминанта од трет ред е еднаква на волу-



Слика 2.4: Мешан производ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

менот на паралелопипедот конструиран над вектор-колоните (редиците) од детерминантата. Од друга страна, апсолутната вредност на детерминанта од втор ред претставува плоштината на паралелограмот конструиран над вектор-колоните (редиците) на таа детерминанта.

Задача 29. Точките $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6)$ и $D(2,3,8)$ се темиња на триаголна пирамида (тетраедар).

а) Пресметај го волуменот на таа пирамида;

б) Пресметај ја висината на пирамидата спуштена од темето D.

Решение. а) Волуменот V на пирамидата се пресметува по формулата $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$. (Зошто?) Ги пресметуваме векторите:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

од каде што

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 84.$$

Добиваме: $V = 14$.

б) Од врската $V = \frac{BH}{3}$, каде што B и H се плоштината на основата и висината на пирамидата соодветно, добиваме $H = \frac{3V}{B}$. За да ја најдеме B го пресметуваме модулот на векторот $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$, од каде што $B = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$ (види ја равенката (2.3.3)). Конечно, $H = \frac{3 \cdot 14}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.

Задача 30. Векторите $\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, и $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, се носечки рабови на паралелопипед. Пресметај го неговиот волумен. Пресметај ја висината што е нормална на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За која вредност на α векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни?

Решение. Задачата е аналогна на претходната и затоа ја оставаме на читателот.

Задача 31. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се единечни вектори што зафаќаат агол $\pi/4$. Пресметај го волуменот на паралелопипедот што го формираат векторите $\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$.

Решение. Бараниот волумен е еднаков на апсолутната вредност од мешаниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$, т.е.:

$$V = |(\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})|.$$

Прво пресметуваме: $|\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}\,) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следно, ја користиме дефиницијата на мешан производ (2.4.2) и добиваме:

$$V = \left|\left(\left(\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b}\,)\right)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}\,)\right)\right| = |(\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}\,)| = |\vec{a}\times\vec{b}\,|^2 = \frac{1}{2}.$$

2.6 Дополнителни задачи

Задача 32. Каква меѓусебна положба мора да имаат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за да важи:

а) $|\vec{a}+\vec{b}\,| = |\vec{a}-\vec{b}\,|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}\,| = |\vec{a}-\vec{b}\,|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}\,| = |\vec{a}\,|-|\vec{b}\,|$?

Задача 33. Определи аголот меѓу векторите:
а) $\vec{a} = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ 0\ \ 2\ \ 2\ ]^T$;
б) $\vec{a} = [\ 1\ \ 1\ ]^T$ и $\vec{b} = [\ 1\ \ -1\ ]^T$,
и ортогоналната проекција на $\vec{a}$ врз $\vec{b}$.

Задача 34. Нека $A(1,2,3)$ и $B(3,2,2)$ се две соседни темиња на паралелограм $ABCD$, чии дијагонали се сечат во точката $O(1,1,7)$. Определи ги останатите темиња на паралелограмот, неговите висини и плоштина. Определи ги и аглите на паралелограмот.

Задача 35. Ненултите вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ се ортогонални. За која вредност на параметарот c векторите $\vec{x}+c\vec{y}$ и $\vec{x}+\vec{y}$ зафаќаат прав агол?

Задача 36. Пресметај $\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$, ако $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Задача 37. Провери дали векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лежат во иста рамнина:
а) $\vec{a} = [\ 2\ \ 3\ \ -1\ ]^T, \vec{b} = [\ 1\ \ -1\ \ 3\ ]^T$ и $\vec{c} = [\ 1\ \ 4\ \ -4\ ]^T$;
б) $\vec{a} = [\ 1\ \ 0\ \ -1\ ]^T, \vec{b} = [\ 1\ \ 1\ \ 0\ ]^T$ и $\vec{c} = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]^T$. Дали векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ формираат паралелопипед? Ако формираат, колку е неговиот волумен?

Задача 38. Точките $A(1,2,-4), B(2,0,-1)$ и $C(1,1,2)$ се темиња на триаголна пирамида. Четвртото теме D лежи на oz-оската. Определи ги координатите на точката D ако се знае дека волуменот на тетраедарот изнесува 1. Најди ја висината спуштена од темето D.

Задача 39. Најди:

а) Вектор паралелен со векторот $[\ 1 \quad 1 \quad -1\ ]^T$;

б) Единечен вектор кој има иста насока со векторот $[\ 1 \quad -1 \quad 1\ ]^T$;

в) Единечен вектор кој има спротивна насока со векторот $[\ 1 \quad -1 \quad 1\ ]^T$;

г) Вектор нормален на $[\ 1 \quad -1 \quad 1\ ]^T$;

д) Единечен вектор кој лежи во XOY рамнината и е нормален на $[\ 1 \ 2 \ 3\ ]^T$;

ѓ) Единечен вектор кој лежи во YOZ рамнината и е нормален на $[\ 0 \ 1 \ 2\ ]^T$.

Задача 40. Провери дали точките $A(1,1,-1)$, $B(3,4,6), C(2,-2,1)$ и $D(1,3,2)$ формираат тетраедар.

Задача 41. Пресметај го волуменот на пирамидата со темиња

$$A(1,3,-2),\ \ B(-3,2,0),\ \ C(4,9,-5) \text{ и } D(6,7,3).$$

Задача 42. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат должина 5 и зафаќаат агол $\pi/4$. Најди ја плоштината на триаголник определен со векторите $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Задача 43. Каков услов треба да исполнуваат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за равенката $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{x}$ да има решение? Колку такви решенија има?

Глава 3

Матрици

3.1 Дефиниција на матрици

Дефиниција 1. *Матрица со димензии* $m \times n$ е табела од $m \times n$ истородни објекти распоредени во m редици и n колони:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

или накратко: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Објектите a_{ij} се *елементи на матрицата*. Елементите најчесто се реални или комплексни броеви. Матрица со една колона

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

е вектор. Секоја ваква матрица уште ја нарекуваме и *вектор-колона* или само колона. Слично, матрицата $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ се вика *вектор-редица* или само редица. За матрицата $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $k = \min\{m, n\}$, елементите

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{kk}$$

ја формираат *главната дијагонала* на матрицата (тоа се елементите a_{ij} при $i = j$) и се нарекуваат *дијагонални елементи*. Доколку матрицата има еднаков број на редици и колони (односно важи $m = n$), велиме дека е *квадратна*. Секоја матрица кај која сите елементи надвор од главната дијагонала се 0 е *дијагонална матрица*. Од посебен интерес се матриците кај кои сите елементи под главната дијагонала се еднакви на 0. Ваквите матрици ги нарекуваме *горно-триаголни*. Аналогно се дефинираат и *долно-триаголни* матрици.

Задача 44. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Од кој облик се?

Решение. Сите три матрици се од облик 3×3. Матрицата A е дијагонална, B е долно-триаголна, а C е горно-триаголна.

3.2 Операции со матрици и својства

Дефиниција 2. За две матрици A и B велиме дека се *еднакви* доколку имаат исти димензии и соодветните елементи им се еднакви. Со други зборови, равенството $A_{m\times n} = B_{p\times q}$ подразбира дека $m = p$, $n = q$ и $a_{ij} = b_{ij}$ за сите $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Дефиниција 3. Операцијата *производ* на матрица A со скалар k дава матрица kA, матрица со исти димензии со матрицата A и елементи кои се елементите од матрицата A помножени со скаларот k, односно:

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Дефиниција 4. Нека матрицата A е од ред $m \times n$, а матрицата B е од ред $p \times q$. Операцијата *збир* $A + B$ е дефинирана само доколку $m = p$ и $n = q$, односно кога матриците имаат исти димензии. Во потврден случај, резултатот е матрицата $C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$. Ја користиме ознаката $C = A + B$.

Задача 45. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Пресметај: $2A$, $A + B$, $B + C$ и $3B - 2C$.

Решение.

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B+C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, 2B-3C = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -21 \\ 4 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Збирот $A+B$ не постои бидејќи матриците A и B имаат различни димензии.

Дефиниција 5. *Транспонирана матрица* на матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

е матрицата:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Очигледно, транспонираната матрица се добива така што секоја редица ќе го замени местото со соодветната колона. Скратено, $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ кога $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Нека матриците A, B и C имаат димензија $m \times n$. За операциите множење со скалар и собирање на матрици важат следните својства:

(i) Собирањето матрици е комутативна операција, односно

$$A + B = B + A.$$

(ii) Собирањето матрици е асоцијативна операција, односно

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

(iii) $a(A + B) = aA + aB$, за произволен скалар a.

(iv) $(a + b)A = aA + bA$, за произволни скалари a и b.

(v) Нека $O = O_{m \times n}$ е матрица чии елементи се сите еднакви на 0. Тогаш, $A + O = O + A = A$. Матрицата O се нарекува *нулта матрица*.

(vi) $(ab)A = a(bA)$, за произволни скалари a и b.

(vii) $A + (-A) = O$.

$(viii)$ $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(aA)^T = aA^T$, за произволен скалар a.

(ix) $(A^T)^T = A$.

Задача 46. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Пресметај ги матриците A^T, B^T и C^T.

Решение. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ и $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Да забележиме дека дефиницијата на транспонирана матрица ни ја оправдува нотацијата за вектори која ја воведовме во главата 2.

Дефиниција 6. Нека матрицата A е од ред $m \times n$, а матрицата B е од ред $p \times q$. Операцијата *производ* AB е дефинирана само доколку $n = p$. Во потврден случај резултатот е матрица $C = [c_{ij}]_{m\times q}$ (со димензија $m \times q$) за која:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q.$$

Да забележиме дека елементот c_{ij} е скаларен производ (дефиниран со (2.2.2)) на i-тата вектор-редица од матрицата A и j-тата вектор-колона од матрицата B.

Задача 47. Нека $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Пресметај ги матриците AB и BA.

Решение. Од дефиницијата на производ на матрици се добива дека

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Забележуваме дека во овој случај $AB \neq BA$. Ова нѐ води до првото од следните својства на операцијата производ на матрици:

(i) Множењето на матрици не е комутативна операција, односно постојат матрици A и B, такви што $AB \neq BA$ (види ја задачата 47). Ако за матриците A и B важи $AB = BA$, тогаш велиме дека матриците *комутираат*.

(ii) Множењето на матрици е хомогена операција, односно за секој скалар k важи:

$$(kA)B = k(AB) = A(kB).$$

(iii) За множењето на матрици важи дистрибутивниот закон од лево:

$$C(A + B) = CA + CB$$

и од десно:

$$(A + B)C = AC + BC.$$

(*iv*) Множењето на матрици е асоцијативна операција, односно:

$$A(BC) = (AB)C.$$

(*v*) Транспониранаата матрица на производот на две матрици е производ на двете транспонирани матрици во обратен редослед, односно:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Доказот на претходните својства е директна последица од дефиницијата на матрица и на операциите над матрици.

Задача 48. Најди ги матриците кои комутираат со матрицата:
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение. Нека матрицата X комутира со матрицата A. Јасно е дека X е од облик 2×2, т.е. $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Од условот $AX = XA$ се добива

$$AX = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = XA.$$

Согласно условот за еднаквост на матрици добиваме дека: $a = d$ и $b = c$. Значи, сите матрици од множеството $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ комутираат со матрицата A.

За секоја квадратна матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ може да се пресмета *детерминанта на матрицата*: имено, детерминантата на броевите $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. За детерминантата на матрицата A ја користиме ознаката $\det(A)$.

Задача 49. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Пресметај ги детерминантите $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$.

Решение. Се добива дека: $\det(A) = 1$, $\det(B) = -2$. $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, па $\det(AB) = -2 = 1 \cdot (-2) = \det(A)\det(B)$.

(*vi*) Нека A и B се квадратни матрици од ист ред. Тогаш, важи:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

и за секој $n \in \mathbb{N}$,

$$\det(A)^n = (\det(A))^n.$$

Задача 50. Пресметај ги матриците AB и AC ако: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогно се добива дека $AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Да забележиме дека во последниот пример се добива $AB = AC$, и покрај тоа што: $B \neq C$ и $A \neq O$. (Му препуштаме на читателот да провери дека $\det(A) = 0$). Ова ни укажува дека во општ случај при операцијата множење на матрици не е дозволено да се крати со ненулта квадратна матрица: при $A \neq O$ и $AB = AC$ не е секогаш точно дека $B = C$. Од друга страна, споменатото „кратење“ е оправдано доколку $\det(A) \neq 0$. Дускусијата во врска со ова ќе ја продолжиме во следната глава.

Квадратната матрица I_n од ред n (т.е. димензија $n \times n$) чии елементи се

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases},$$

односно:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

се нарекува *единечна* (или идентична) матрица. Во литературата често за оваа матрица се користи и ознаката E_n. Ако редот на единечната матрица е познат, индексот може да се испушти, па пишуваме само I. Јасно, $\det(I_n) = 1$.

> (vii) За секоја матрица A од димензија $m \times n$ важи
>
> $$AI_n = A \text{ и } I_m A = A.$$

3.3 Дополнителни задачи

Задача 51. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ a+b & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} c & c+b & 2a \\ 3 & -c & 3 \end{bmatrix},$$

каде што $a, b, c \in \mathbb{R}$. За кои вредности на a, b, c важи $A = B$?

Задача 52. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Пресметај ги AX и $X^T A$.

Задача 53. Најди ги сите матрици кои комутираат со матрицата:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{б) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача 54. Најди „магична“ квадратна матрица M_3 од облик 3×3 чиишто елементи се броевите $1, 2, \ldots, 9$ распоредени така што сумата на броевите по секоја редица, колона и дијагонала е еднаква на 15. Пресметај го производот на M_3 со матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Задача 55. Матрицата S е квадратна судоку матрица со димензија 9×9 чиишто елементи се броевите $1, 2, \ldots, 9$, така што броевите во секоја редица и колона меѓу себе се различни. Да се најде производот на S со матрицата $\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$.

Задача 56. Пресметај $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^4$.

Задача 57. Пресметај: A^n, $n \in \mathbb{N}$, каде што $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Задача 58. Пресметај: A^n, $n \in \mathbb{N}$, каде што $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 59. Најди ги сите горно-триаголни (долно-триаголни) матрици A со димензија 2×2, такви што A^2 е нултата матрица O_2 (т.е. матрица од ред 2 со сите елементи 0).

Задача 60. Најди ги сите долнотриаголни матрици A од ред 2, такви што A^2 е единечната матрица I_2.

Задача 61. Како се менува производот AB на матриците A и B ако:

а) во матрицата A си ги заменат местата i-тата и j-тата редица;

б) во матрицата A на i-тата ѝ ја додадеме j-тата редица помножена со x;

в) во матрицата B си ги заменат местата i-тата и j-тата колона;

г) во матрицата B на i-тата ѝ ја додадеме j-тата колона помножена со y?

Глава 4

Системи линеарни равенки

Систем од m линеарни равенки со n непознати е:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}, \tag{4.0.1}$$

каде што $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ за $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, а $x_i, 1 \leq i \leq n$, се *непознати*. Броевите $b_i, 1 \leq i \leq m$, се *слободни коефициенти* на системот. Доколку сите слободни коефициенти $b_i = 0, 1 \leq i \leq n$, велиме дека системот е *хомоген*. Во спротивно, станува збор за *нехомоген* систем.

Ако бројот на равенки е еднаков со бројот на непознати ($m = n$), тогаш системот е *квадратен*, т.е. имаме систем од n линеарни равенки со n непознати:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots+ & a_{nn}x_n = & b_n \end{cases}. \tag{4.0.2}$$

Под *множество решенија* M на системот (4.0.1) се подразбира севкупноста од сите подредени n-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ од реални броеви за кои е задоволена секоја равенка од системот. Геометриски гледано, множеството решенија M на систем од линеарни равенки со n непознати претставува афин потпростор од $\mathbb{R}^n$. Притоа, произволна n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ е *решение* на системот. Доколку $M = \emptyset$, велиме дека системот е *противречен* (нема решение). Од друга страна, ако $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ е едноелементно множество, велиме дека системот е *регуларен* (има единствено решение). Во спротивно, важи $|M| = \infty$, односно системот е *неопределен* (има бесконечно многу решенија). За два системи од линеарни равенки велиме дека се *еквивалентни* доколку имаат еднакви множества решенија.

Во продолжение ќе прикажеме неколку техники за решавање на системи линеарни равенки.

4.1 Крамерови правила

Крамеровите правила се применливи единствено на квадратни системи. Кон системот (4.0.2) придружуваме $n+1$ детерминанти $\triangle, \triangle_{x_1}, \triangle_{x_2}, \ldots, \triangle_{x_n}$, дефинирани на следниот начин: *главна детерминанта на системот* (4.0.2) е детерминантата составена од коефициентите пред непознатите, т.е.:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \tag{4.1.1}$$

а на секоја од непознатите x_i ѝ придружуваме по една детерминанта:

$$\triangle_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}, \tag{4.1.2}$$

која што се добива од детерминантата $\triangle$ кога i-тата колона се заменува со колоната од слободните коефициенти, односно колоната $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ се заменува со $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

За секоја n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ што го задоволува системот (4.0.2) важи:

$$\begin{cases} \triangle \cdot x_1 = & \triangle_{x_1} \\ \triangle \cdot x_2 = & \triangle_{x_2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \triangle \cdot x_n = & \triangle_{x_n} \end{cases}. \tag{4.1.3}$$

Напоменуваме дека системите (4.0.2) и (4.1.3) во општ случај не се еквивалентни. Со други зборови, секое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на првиот е решение и на вториот, но обратното не важи секогаш.

Пример 7. Да го разгледаме следниот нехомоген систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 & = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 & = b_2 \end{cases}, \tag{4.1.4}$$

односно барем еден од слободните коефициенти b_1, b_2 е различен од 0. Јасно е дека ваквиот систем е противречен. За неговите детерминати важи: $\triangle = \triangle_{x_1} = \triangle_{x_2} = 0$, што значи дека изведениот систем (4.1.3) во случајов гласи:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & = 0 \\ 0 \cdot x_2 & = 0 \end{cases}. \tag{4.1.5}$$

Очигледно, (4.1.5) е неопределен систем (неговото множество решенија е $\mathbb{R}^2$). Следствено, системите (4.1.4) и (4.1.5) не се еквивалентни.

Од друга страна, ако барем една од детерминатите $\triangle, \triangle_{x_1}, \triangle_{x_2}, \ldots, \triangle_{x_n}$ е различна од нула, тогаш системите (4.0.2) и (4.1.3) со сигурност се еквивалентни.

Крамерови правила:

(i) Системот (4.0.2) е регуларен ако и само ако за главната детерминанта на овој систем важи $\triangle \neq 0$. Притоа, единственото решение $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ е определено со:

$$x_1^* = \frac{\triangle_{x_1}}{\triangle},\ x_2^* = \frac{\triangle_{x_2}}{\triangle},\ \ldots,\ x_n^* = \frac{\triangle_{x_n}}{\triangle}. \tag{4.1.6}$$

Значи, доколку $\triangle \neq 0$, системите (4.0.2) и (4.1.3) се еквивалентни (уште повеќе секој од нив е регуларен).

(ii) Нека $\triangle = 0$. Ова значи дека ниту еден од системите (4.0.2) и (4.1.3) не е регуларен. Разгледуваме одделно два случаја.

(ii_1) Ако барем една од детерминантите $\triangle_{x_1}, \triangle_{x_2}, \ldots, \triangle_{x_n}$ е различна од нула, тогаш системот (4.0.2) е противречен. Навистина, при наведените претпоставки очигледно е дека системот (4.1.3) е противречен, па заклучокот следува од фактот што секое решение на (4.0.2) е решение и на (4.1.3).

(ii_2) Ако $\triangle_{x_1} = \triangle_{x_2} = \cdots = \triangle_{x_n} = 0$, тогаш изведениот систем (4.1.3) е неопределен (секоја n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ од реални броеви го задоволува системот, т.е. неговото множество решенија е $\mathbb{R}^n$). Напоменуваме дека, при наведените претпоставки, за системот (4.0.2) сè уште има две можности - противречен или неопределен. Она што може да се каже со сигурност е дека постои равенка во овој систем која е „вишок“, односно е последица од преостанатите равенки на системот. Со други зборови, системот (4.0.2) е еквивалентен (има исто множество решенија) на некој потсистем добиен со бришење на една од неговите n равенки.

Задача 62. Реши го системот:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 3 \\ 3x + y + z &= 5 \end{cases}.$$

Решение. Пресметуваме $\triangle = \triangle_x = \triangle_y = \triangle_z = 0$. Ова ни кажува дека барем една од равенките е вишок. На пример, не е тешко да забележиме дека третата равенка се добива доколку се соберат првите две равенки. Оттаму, таа равенка можеме слободно да ја игнорираме при решавање на системот. Со други зборови, наведениот систем е еквивалентен со следниот потсистем:

$$\begin{cases} x+2y-z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 3 \end{cases}.$$

Оставаме на читателот да го разреши овој потсистем со тоа што најпрво ќе го презапише како регуларен квадратен систем по непознати x и y:

$$\begin{cases} x+2y &= 2+z \\ 2x-y &= 3-2z \end{cases}.$$

Всушност во овој пример секоја (една) од трите равенки кај почетниот систем е вишок: може да се добие со собирање на преостаните две равенки претходно помножени со соодветни коефициенти. Следствено, секој од трите потсистема од две равенки со три непознати е еквивалентен на почетниот систем, па може да послужи за негово решавање.

Следната забелешка се однесува на систем од три линеарни равенки со три непознати x, y, z, таков што: $\triangle = \triangle_x = \triangle_y = \triangle_z = 0$.
Ако две од равенките се пропорционални, тогаш една од нив е вишок. Доколку никои две од равенките не се пропорционални, тогаш која било (една) од трите равенки е вишок.

Задача 63. Реши ги системите равенки со помош на Крамеровите правила:

а) $\begin{cases} 7x-6y &= -5 \\ 5x+2y &= 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3y+2x &= z+1 \\ 3x+2y &= 8-5z \\ 3z-1 &= x-2y \end{cases}$.

Решение.
а) $\triangle = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$, $\triangle_x = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 44$, $\triangle_y = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 88$.
Според Кармеровите правила системот има единствено решение и тоа е парот $(x, y) = (\triangle_x/\triangle, \triangle_y/\triangle) = (1, 2)$.

б) Најпрво, дадениот систем го трансформираме во облик (4.0.2).

$$\begin{cases} 3y+2x &= z+1 \\ 3x+2y &= 8-5z \\ 3z-1 &= x-2y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 3x+2y+5z &= 8 \\ -x+2y+3z &= 1 \end{cases}.$$

Главната детерминанта на системот е $\triangle = -53 \neq 0$, од каде што според Крамеровите правила системот има единствено решение. За другите детерминанти добиваме: $\triangle_x = -78$, $\triangle_y = 13$ и $\triangle_z = -53$. Оттаму, бараното решение на системот е: тројката $(x, y, z) = (\triangle_x/\triangle, \triangle_y/\triangle, \triangle_z/\triangle) = (78/53, -13/53, 1)$.

Задача 64. Дискутирај ги решенијата на системот равенки во зависност од вредноста параметарот $a \in \mathbb{R}$:

а) $\begin{cases} ax - 3y &= 1 \\ ax - 2y &= 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y &= a^2+1 \\ (a-1)x + (a+1)y &= a^2+1 \end{cases}$.

Решение. а) Главната детерминанта на системот е: $\Delta = \begin{vmatrix} a & -3 \\ a & -2 \end{vmatrix} = a$. Аналогно добиваме дека: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a$. Ги разгледуваме следните два случаја.

1^o Нека $\triangle \neq 0$, што е еквивалентно со $a \neq 0$. Тогаш, (според Крамеровите правила) системот има единствено решение $(x, y) = (\triangle_x/\triangle, \triangle_y/\triangle) = (4/a, 1)$.

2^o Нека $\triangle = 0$, што е еквивалентно со $a = 0$. Тогаш, системот е од облик:

$$\begin{cases} 0x - 3y &= 1 \\ 0x - 2y &= 2 \end{cases},$$

од каде што $-1/3 = y = -1$. Но, ова е противречност, односно системот нема решение. До истиот заклучок се доаѓа и од вредноста на детерминантите Δ_x и Δ_y. Имено $\Delta_x = 4 \neq 0$ и $\Delta_y = 0$. Па, според (ii_1) системот нема решение.

б)

$$\triangle = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a,$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} a^2+1 & a+1 \\ a^2+1 & a-1 \end{vmatrix} = -2(a^2+1),$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} a+1 & a^2+1 \\ a-1 & a^2+1 \end{vmatrix} = 2(a^2+1).$$

Разгледуваме два случаја.

1^o Нека $\triangle \neq 0$, односно $a \neq 0$. Тогаш, (според Крамеровите правила) системот има единствено решение $(x, y) = \left(-\dfrac{a^2+1}{2a}, \dfrac{a^2+1}{2a}\right)$.

2^o Нека $\triangle = 0$, односно $a = 0$. Тогаш, системот е од облик:

$$\begin{cases} x - y & = 1 \\ -x + y & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y & = 1 \\ x - y & = -1 \end{cases},$$

од каде што заклучуваме дека системот е противречен. Слично на претходниот пример, и овде добиваме дека: $\Delta_x = -2 \neq 0$, $\Delta_y = 2 \neq 0$, па од (ii_1) следува дека системот нема решение.

Задача 65. Дискутирај ги решенијата на системот равенки во зависност од параметарот $a \in \mathbb{R}$:

а) $\begin{cases} (a+2)x & +ay & & = 1 \\ 3x & & +(2-a)y & = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} ax & +2y & +z & = 1 \\ x & +2y & +z & = 2 \\ x & +2y & +az & = 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} a^2x & +3y & +2z & = 0 \\ ax & -y & +z & = 0 \\ & y & +4z & = 0 \end{cases}$.

Решение. а) Го оставаме на читателот.

б) Најпрво ја определуваме главната детерминанта на системот,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 4a + 2 = 2(a-1)^2,$$

а потоа и детерминантите:

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -2(a-1),$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-1),$$

$$\triangle_z = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-a).$$

Разгледуваме два случаја во зависност од вредноста на Δ.

1^o Нека $\triangle \neq 0$, односно $a \neq 1$. Тогаш, системот има единствено решение

$$(x, y, z) = (\triangle_x/\triangle, \triangle_y/\triangle, \triangle_z/\triangle) = (-1/(a-1), a/(a-1), -1/(a-1)).$$

2^o Нека $\triangle = 0$, односно $a = 1$. Во овој случај $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па во согласност со (ii_2), Крамеровите правила не даваат одговор дали системот има бесконечно многу решенија или нема решение. Но, доволно е да забележиме дека конкретниот систем гласи:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases},$$

од каде што добиваме $1 = x+2y+z = 2$. Оваа противречност укажува дека системот нема решение.

Да напоменеме дека геометриската интерпретација на нетривијална линеарна равенка со три непознати е рамнина. (За линеарна равенка велиме дека е *тривијална* доколку сите коефициенти пред непознатите се еднакви на 0.) Во овој пример две рамнини се совпаѓаат, а третата е паралелна со другите две. Подетално ова ќе го дискутираме во главата 5.

в) Детерминантата на системот е:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4a^2 + 2a - a^2 - 12a = -5a(a+2).$$

За другите детерминанти, со оглед дека системот е хомоген, важи: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Разгледуваме два случаја.

1^o Нека $\triangle \neq 0$, односно $a \neq 0, a \neq -2$. Бидејќи $\triangle_x = \triangle_y = \triangle_z = 0$, единствено решение на системот е тројката:

$$(x,y,z) = (\triangle_x/\triangle, \triangle_y/\triangle, \triangle_z/\triangle) = (0,0,0).$$

2^o Ако $\triangle = 0$, тогаш има две можности.

2.1^o $a = 0$: Системот гласи:

$$\begin{cases} 3y+2z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y+4z &= 0 \end{cases}$$

Сите решенија на системот се тројките: $(x,y,z) = (t,0,0), t \in \mathbb{R}$.

2.2 $a = -2$: Системот гласи:

$$\begin{cases} 4x+3y+2z &= 0 \\ -2x-y+z &= 0 \\ y+4z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+3y+2z &= 0 \\ & \\ y+4z &= 0 \end{cases}.$$

Добиваме дека: $z = t \in \mathbb{R}$, $y = -4t$, $x = \dfrac{1}{4}(12t - 2t) = \dfrac{5t}{2}$. Сите решенија на системот се тројките: $(x, y, z) = (\dfrac{5t}{2}, -4t, t)$ каде што $t \in \mathbb{R}$.

Гледано геометриски и во двата случаја (2.1 и 2.2), трите рамнини (претставени со трите равенки) се сечат во една права. Решенијата на системот се точките од правата.

4.2 Матричен облик на систем равенки

Системот (4.0.1) можеме да го запишеме во следниот облик:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{4.2.1}$$

Ако ставиме $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, системот (4.0.1), односно равенката(4.2.1) го добива обликот:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{4.2.2}$$

Велиме дека векторот $\vec{b}$ е *линеарна комбинација* од векторите $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ доколку е исполнето равенството (4.2.2) за некои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$. Коефициентите пред векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ во равенката (4.2.2) се решение на системот (4.0.2). Ваквиот пристап ќе го искористиме за да воведеме нов, матричен, облик на систем линеарни равенки.

Нека A е матрица од ред $m \times n$ со следниве елементи:

$$A = [\ \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n\ ].$$

Тогаш системот (4.0.1) може да се запише:

$$AX = \vec{b}, \tag{4.2.3}$$

каде што $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Во продолжение нѐ интересира кога системот (4.0.1) има решение во зависност од векторот $\vec{b}$.

4.2.1 Гаусов метод на елиминација

Главната идеја на Гаусовиот метод на елиминација е поедноставување на системот до горно-триаголна (или трапезна форма) со елиминирање на некои непознати од некои равенки. Методот ќе го илустрираме низ примери.

Задача 66. Да се реши системот линеарни равенки: $\begin{cases} x & -2y & = 1 \\ 3x & +2y & = 11 \end{cases}$.

Решение.За решавање на овој систем може да примениме некој од познатите методи, како метод на замена или метод на елиминација. Кога овој систем би го решавале со метод на елиминација, првата равенка би ја помножиле со 3 и би ја одземале од втората равенка. Со тоа би се добил следниот еквивалентен систем: $\begin{cases} x & -2y & = 1 \\ & 8y & = 8 \end{cases}$. Забележуваме дека втората равенка е со една непозната и од неа следува $y = 1$. Бидејќи вредноста на y е позната, директно се добива и дека $x = 3$.

Гаусовиот метод на елиминација се базира на истата идеја, но во матрична форма која е многу поповолна за работа со повеќе променливи. Зададениот систем го запишуваме во матрична форма, поточно во обликот $[A|\vec{b}]$ [1], а потоа со низа трансформации матрицата A ја доведуваме до горно-триаголна (или трапезна) форма.

Ако зададениот систем го запишеме во оваа форма се добива:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right].$$

Да забележиме дека првата колона одговара на коефициентите пред променливата x, а втората колона на коефициентите пред променливата y. За да дојдеме до горно-триаголна форма ја правиме истата трансформација како и претходно, првата редица ја множиме со 3 и ја одземаме од втората редица:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right] \underset{-3r_1+r_2 \to r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right].$$

[1] Во продолжение наместо $\vec{b}$ може да пишуваме само b.

Веќе матрицата A е во горно-триаголна форма и системот гласи: $\begin{cases} x & -2y & =1 \\ & 8y & =8 \end{cases}$,
Од втората равенка на овој систем наоѓаме дека $y=1$, а потоа заменувајќи ја оваа вредност во првата равенка добиваме дека $x=3$.

Задача 67. Да се реши системот линеарни равенки: $\begin{cases} x & +3y & -2z & =1 \\ 3x & +8y & -5z & =8 \\ 2x & +4y & +z & =6 \end{cases}$.

Решение. Дадениот систем го запишуваме во матрична форма:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Сите потребни операции ќе ги правиме на проширената матрица. Во првиот чекор ќе ја елиминираме непознатата x од втората равенка, во вториот чекор ќе ја елиминираме непознатата x од третата равенка. За да го постигнеме ова на позиција $(2,1)$ (односно во втора редица и прва колона) треба да добиеме 0, а потоа истото и на позиција $(3,1)$. Во двата чекора клучен елемент е елементот во прва редица и прва колона. Во овој пример на таа позиција е бројот 1. Во други примери, може да се промени редоследот на редиците (или на колоните) со цел на позицијата $(1,1)$ да се добие број со кој операциите би биле поедноставни. Со помош на овој елемент ќе ги анулираме коефициентите во истата колона во подолните редици. Овој елемент се нарекува *пивот*. Напоменуваме дека пивот не може да биде 0. За подобра прегледност, пивотите ќе ги маркираме со квадрати.

Бројот 3 во прва колона и втора редица (на позиција $(2,1)$) го елиминираме така што првата редица ја множиме со -3 и ја додаваме на втората редица:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{-3r_1+r_2\to r_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Бројот 2 на позиција $(3,1)$ го елиминираме така што првата редица ја множиме со -2 и ја додаваме на третата редица:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{-2r_1+r_3\to r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right].$$

Со овие постапки, всушност, е елиминирана променливата x од втората и третата равенка. Следно (за да се добие горно-триаголна форма), елементот -2 кој се наоѓа на позиција $(3,2)$ треба да се анулира. За таа цел, втората редица ја множиме со -2 и ја додаваме на третата редица:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right] \underset{-2r_2+r_3\to r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -6 \end{array}\right].$$

Со оваа постапка е елиминирана променливата y од третата равенка. Од последната матрица се враќаме повторно во форма на систем и добиваме:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +3y & -2z & =1 \\ & -y & +z & =5 \\ & & 3z & =-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x & +3y & +4 & =1 \\ & -y & -2 & =5 \\ & & z & =-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =18 \\ y & =-7 \\ z & =-2 \end{array}\right. .$$

Во претходниот пример, проширената матрица на системот линеарни равенки ја трансформиравме во горнотриаголна матрица. За ваквата трансформација употребувавме операции кои може да се применат и на самиот систем равенки и со тоа да го реализираме методот на елиминација. Јасно е дека при вакви трансформации множеството решенија на системот не се менува, бидејќи секоја поединечна трансформација дава еквивалентен систем со почетниот систем.

4.2.2 Кога не фунционира Гаусовиот метод

Гаусовиот метод на елиминација не секогаш функционира идеално. Следните примери ги обработуваат случаите кога Гаусовиот систем не функционира.

Задача 68. Да се реши системот: $\left\{\begin{array}{rrrl} & 2y & +z & =5 \\ x & +y & -z & =2 \\ x & -2y & +3z & =0. \end{array}\right. .$

Решение. Системот го запишуваме во матрична форма и забележуваме дека 0 има на позицијата на која треба да е пивотот. Овој проблем се елиминира со замена на две редици во матрицата (во случајот првата и втората редица). Оваа трансформација е еквивалентна на промена на редоследот на првата и втората равенка во системот.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{11/2} & 11/2 \end{array}\right].$$

По трансформацијата системот ја добива следната форма:

$$\begin{cases} x & +y & -z & = 2 \\ & 2y & +z & = 5 \\ & & 11/2z & = 11/2. \end{cases},$$

па решението на системот е: $x = 1, y = 2, z = 1$.

Задача 69. Да се реши системот линеарни равенки: $\begin{cases} x & -2y & = 1 \\ 2x & -4y & = 11 \end{cases}$.

Решение. Откако системот ќе го запишеме во матричен облик и ќе го примениме Гаусовиот метод на елиминација се добива:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{9} \end{array}\right].$$

Забележуваме дека бројот на пивотни елементи во главната матрица (еден) е различен од бројот на пивоти во проширената матрица (два), па во овој случај системот е противречен, односно нема решение.

Задача 70. Да се реши системот линеарни равенки:

$$\begin{cases} x & +2y & +2z & +3w & = 3 \\ 2x & & -z & -w & = 2 \\ x & +2y & +6z & -w & = 3 \\ x & -2y & +5z & -12w & = -1 \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем ќе го претставиме во матрична форма и ќе го примениме методот на елиминација.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Забележуваме дека во овој случај бројот на пивот во главната матрица е еднаков на бројот на пивоти во проширената матрица (три), но е помал од бројот на непознати во системот. Во ваков случај системот има бесконечно многу решенија. Од Гаусовата елиминација се добива еквивалентниот систем:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +2z & +3w & =3 \\ & -4y & -5z & -7w & =-4 \\ & & 4z & -4w & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrl} x & +2y & =3-5w \\ & -4y & =-4+12w \\ & z & =w \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x & =1+w \\ y & =1-3w \\ z & =w \end{array}\right. \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+w \\ 1-3w \\ w \\ w \end{bmatrix}, w \in \mathbb{R}.$$

Како што е илустрирано во претходните примери, важи:

(*i*) Ако бројот на пивоти во матрицата A е еднаков на бројот на пивоти во матрицата $[A|b]$ и на бројот на непознати во системот, тогаш системот има единствено решение.

(*ii*) Ако бројот на пивоти во матрицата A е еднаков на бројот на пивоти во матрицата $[A|b]$, но помал од бројот на непознати во системот, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

(*iii*) Ако бројот на пивоти во матрицата A е различен од бројот на пивоти во матрицата $[A|b]$, тогаш системот нема решение.

Овој резултат е познат како **теорема на Кронекер-Капели**.

4.3 Инверзна матрица

За квадратната матрица A велиме дека е *инверзибилна* доколку постои матрица матрица B, таква што $AB = BA = I$. Во потврден случај, постои точно една ваква матрица B. Се означува со A^{-1} и се нарекува *инверзна* матрица на матрицата A. Ако квадратната матрица A е инверзибилна, тогаш и инверзната матрица A^{-1} е инверзибилна. Притоа, важи $(A^{-1})^{-1} = A$. Дадена квадратна матрица од ред n е инверзибилна ако и само ако при секоја Гаусова елиминација се добиваат

n пивоти. Еквивалентно, квадратна матрица A е инверзибилна ако и само ако $\det(A) \neq 0$.

Ако квадратните матрици A и B од ред n се инверзибилни, тогаш и нивниот производ е инверзибилна матрица. Притоа, важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. За секоја квадратна матрица која не е инверзибилна велиме дека е *сингуларна*.

4.3.1 Пресметување инверзна матрица

Ако квадратната матрица A е инверзибилна, нејзината инверзна може да се најде со помош на Гаусовиот метод на елиминација. За да се определи A^{-1} се прави Гаусова елиминација на матрицата $[A|I]$ со цел да се добие единечна матрица на местото на матрицата A. Така, од $[A|I]$ се доаѓа до $[I|A^{-1}]$. Постапката ќе ја илустрираме со пример.

Задача 71. Да се најде инверзната матрица на матрицата: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение.Бидејќи $\det(A) = -2 \neq 0$, заклучуваме дека A е инверзибилна матрица. Ќе примениме Гаусова елиминација на блок-матрицата $[A|I]$.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{3r_1+r_2\to r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
$$\underset{r_1+r_2\to r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{-1/2r_2\to r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right] = [I|A^{-1}].$$

Одовде, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

4.3.2 Примена на инверзна матрица за решавање системи линеарни равенки

Решението на даден систем од линеарни равенки може да се најде и со помош на инверзни матрици користејќи ги следните резултати:

i) Ако квадратната матрица A е инверзибилна, тогаш векторот $\mathbf{x} = A^{-1}b$ е решение на системот $A\mathbf{x} = b$.

ii) Ако системот $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ има нетривијално решение, тогаш матрицата A не е инверзибилна.

Задача 72. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x & +3y & -2z & = 3 \\ 3x & +8y & -5z & = 8 \\ 2x & +4y & +z & = 7 \end{cases}.$

Решение. Нека:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}.$$

Дадениот систем го запишуваме во матрична форма

$$A\mathbf{x} = b.$$

Бидејќи $\det(A) = -3$, матрицата е инверзибилна, па системот има единствено решение $\mathbf{x} = A^{-1}b$. За да ја определиме матрицата A^{-1} го применуваме Гаусовиот метод на елиминација.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{r_2-3r_1\to r_2 \\ r_3-2r_1\to r_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{r_3-2r_2\to r_3 \\ -2r_2\to r_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{1/3r_3\to r_3 \\ r_2+r_3\to r_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 11/3 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_1-3r_2\to r_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -28/3 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right] = [I|A^{-1}].$$

Оттука, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -28/3 & 11/3 & -1/3 \\ 13/3 & -5/3 & 1/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Односно: $x = -1$, $y = 2, z = 1$.

4.4 Дополнителни задачи

Задача 73. Пресметај ја инверзната матрица на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача 74. За која вредност на x матрицата

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

е:

а) сингуларна;

б) инверзибилна?

Задача 75. Со примена на Крамеровите правила да се реши системот:

а) $\begin{cases} x & +3y & = 2 \\ 3x & -2y & = 5 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x & +3y & = 2 \\ -2x & -3y & = 5 \end{cases}$.

Задача 76. Со примена на Крамеровите правила да се реши системот:

а) $\begin{cases} x & +3y & -2z & = 3 \\ 3x & +8y & -5z & = 8 \\ 2x & +4y & +z & = 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x & +4y & -6z & = 3 \\ 3x & +8y & -5z & = 8 \\ 2x & +4y & +z & = 7 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x & +4y & -6z & = -1 \\ 3x & +8y & -5z & = 8 \\ 2x & +4y & +z & = 7 \end{cases}$.

Задача 77. Дискутирај го, во зависност од параметарот $a \in \mathbb{R}$, системот:

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 3 \\ x & +3y & -z & = 4 \\ 2x & +3y & +(a-1)z & = 5 \end{cases} .$$

Задача 78. Нека: $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ и $A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$. Определи го бројот на пивотни елементи во A.

Задача 79. Да се најдат четири броеви кои ги исполнуваат следните четири услови:

1) Нивната сума е 4;

2) Разликата меѓу првиот и сумата на останатите три е 3;

3) Разликата меѓу сумите на првите два и вторите два броја е еднаква на 1;

4) Разликата меѓу вториот и сумата на останатите три броја е 1.

Задача 80. Кога системот:

а) $$\begin{cases} x & +y & -z & = -2 \\ x & -y & +z & = 4 \\ 2x & +y & -2z & = -3 \\ 3x & & +az & = 1 \end{cases};$$

б) $$\begin{cases} x & -y & +z & = -2 \\ x & +y & -z & = 4 \\ 2x & +y & +2z & = -1 \\ 3x & +2y & +bz & = 3 \end{cases}$$

има решение?

Задача 81. За која вредност на $a \in \mathbb{R}$, системот:

$$\begin{cases} 2x & +2y & +3z & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \\ 3x & +5y & +5z & = 0 \\ 8x & +12y & +az & = 0 \end{cases}$$

има најмалку решенија?

Глава 5

Аналитичка геометрија во простор

5.1 Рамнина

Геометриското место на точки кои ги задоволуваат равенките коишто ќе бидат дадени во продолжение се нарекува рамнина. Геометриски гледано станува збор за т.н. дводимензионален афин потпростор од $\mathbb{R}^3$. Секоја рамнина е еднозначно определена со еден ненулти вектор што е нормален на неа и со една точка што лежи во рамнината. Секоја рамнина е еднозначно определена и со трите сегменти што ги отсекува долж координатните оски. Секоја рамнина е еднозначно определена и со три неколинеарни точки што лежат на неа.

5.1.1 Равенки на рамнина

Постојат неколку видови равенки на рамнина, во зависност од тоа со кои објекти е определена.

(i) **Векторска равенка на рамнина**. Равенката:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0, \tag{5.1.1}$$

каде што $\vec{r}$ е радиус-вектор на произволна точка од просторот, $\vec{r}_0$ е радиус-вектор на точката $M(x_0,y_0,z_0)$ и $\vec{n}$ е произволен вектор е **векторска равенка** на рамнината што минува низ точката $M(x_0,y_0,z_0)$ и е нормална на векторот $\vec{n}$.

(ii) **Скаларна равенка на рамнина**. Равенката:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{5.1.2}$$

каде што A,B,C,x_0,y_0,z_0 се реални броеви т.ш. барем еден од A,B,C е различен од 0, е **скаларна равенка на рамнина** која минува низ точката $M(x_0,y_0,z_0)$ и е нормална на векторот $\vec{n}=[\ A\quad B\quad C\ ]^T$.

(iii) **Општа равенка на рамнина**. Равенката:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{5.1.3}$$

каде што A,B,C,D се реални броеви т.ш. барем еден од A,B,C е различен од 0 е **општа равенка** на произволна рамнина нормална на векторот $\vec{n}=[\ A\quad B\quad C\ ]^T$.

(iv) **Сегментна равенка на рамнина**. Равенката:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{5.1.4}$$

каде што $a,b,c\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ е **сегментна равенка** на рамнина што минува низ точките со координати $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$. (Доколку некој од a,b,c е ∞, станува збор за бесконечната точка од соодветната координатна оска, односно тогаш рамнината е паралелна со таа оска). Ненулти нормален вектор на рамнината е $\vec{n}=[\ 1/a\quad 1/b\quad 1/c\ ]^T$. (Тука користиме конвенција $1/\infty=0$.)

(*v*) **Детерминантна равенка на рамнина**. Нека $A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ и $C(x_c, y_c, z_c)$ се три неколинеарни точки. Тогаш, равенката на рамнината Σ што минува низ точките A, B, C е дадена со следната детерминантна равенка:

$$\Sigma : \begin{vmatrix} x - x_a & y - y_a & z - z_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \end{vmatrix} = 0.$$

Развивањето на оваа детерминанта води кон скаларна, односно општа равенка на рамнината.

5.1.2 Агол меѓу две рамнини

Агол меѓу две рамнини се дефинира како агол формиран од нивни нормални вектори што не надминува $\pi/2$ радијани. Имено, нека се дадени рамнините $\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, чии нормални вектори се: $\vec{n}_1 = [\ A_1 \quad B_1 \quad C_1\ ]^T$ и $\vec{n}_2 = [\ A_2 \quad B_2 \quad C_2\ ]^T$, соодветно. Тогаш аголот меѓу Σ_1 и Σ_2 е определен со:

$$\begin{aligned} \measuredangle(\Sigma_1, \Sigma_2) &= \min\{\measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), \pi - \measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\} \\ &= \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Напоменуваме дека секои два ненулти вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ во просторот формираат два агли; (ориентираниот) агол $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$ се добива кога векторот $\vec{p}$ ротира во насока на движење на стрелките на часовникот додека не се поклопи со насоката на $\vec{q}$, а другиот таков агол $\measuredangle(\vec{q}, \vec{p})$ се добива кога $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ќе си ги заменат местата, односно $\measuredangle(\vec{q}, \vec{p}) = 2\pi - \measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$. Ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ги избереме да бидат нормални вектори на две рамнини, тогаш и векторите $-\vec{p}, -\vec{q}$ се исто така нормални вектори на соодветните рамнини, од каде што минималниот агол по сите комбинации на нормални вектори се сведува на минимум од $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$ и $\pi - \measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$. Последната формула, (5.1.5), е директна последица од косинусна теорема и од фактот дека аголот не е поголем од $\pi/2$.

Задача 82. Најди равенка на рамнина која минува низ точката со координати $(1,2,3)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = [\ 3 \quad 2 \quad 1\ ]$.

Решение. Ја означуваме бараната рамнина со Σ. Равенката (5.1.2) имплицира дека $\Sigma\,:\,3(x-1)+2(y-2)+1(z-3)=0$. Со средување добиваме:

$$\Sigma\,:\,3x+2y+z-10=0.$$

Задача 83. Најди равенка на рамнина која минува низ точката $M(1,2,3)$ и е паралелна на рамнината $\Sigma_1\,:\,x+2y+3z-4=0$.

Решение. Ја означуваме бараната рамнина со Σ. Најпрво проверуваме дали точката $M(1,2,3)$ лежи во рамнината Σ_1. Имаме предвид дека $M(1,2,3)$ лежи во Σ_1 ако и само ако тројката $x=1$, $y=2$ и $z=3$ ја задоволува равенката $x+2y+3z-4=0$. Во конкретниот случај, $1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3-4\neq 0$, што значи дека точката $M(1,2,3)$ не лежи во рамнината Σ_1. Следствено, $\Sigma \not\equiv \Sigma_1$.
Од условот на задачата $\Sigma||\Sigma_1$, т.е. $\vec{n}||\vec{n}_1 = [\ 1 \quad 2 \quad 3\ ]^T$. Затоа можеме да избереме $\vec{n}=\vec{n}_1$ (кој било избор на паралелен вектор на $\vec{n}_1$ резултира со добивање на истата рамнина). Скаларната равенка на бараната рамнина е

$$\Sigma\,:\,1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\,,$$

а општата равенка гласи:

$$\Sigma\,:\,x+2y+3z-14=0\,.$$

Напоменуваме дека, доколку точката M лежеше на Σ_1, односно ја задоволуваше равенката на рамнината Σ_1, тогаш ќе имавме: $\Sigma \equiv \Sigma_1$.

Задача 84. а) Запиши ја рамнината од задачата 82. во сегментен облик и најди ги пресечните точки на рамнината со координатните оски.

б) Пресметај го волуменот на тетраедарот формиран од рамнината Σ и координатните рамнини.

Решение. а) Од задачата 82., општата равенка на рамнината е:

$$\Sigma\,:\,3x+2y+z-10=0.$$

Истата се трансформира во облик:

$$\Sigma\,:\,\frac{x}{\frac{10}{3}}+\frac{y}{\frac{10}{2}}+\frac{x}{10}=1.$$

Од последната равенка заклучуваме дека Σ ги сече координатните оски во точките со координати: $(10/3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ и $(0, 0, 10)$, соодветно.

б) Задачата се сведува на пресметување на волуменот на тетраедар со темиња во точките $(0, 0, 0)$, $(10/3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ и $(0, 0, 10)$. Одовде, должините на трите страни на триаголната пирамида (со едно теме во координатниот почеток) се $10/3$, 5 и 10. Бидејќи координатните оски се заемно нормални, за волуменот добиваме: $V = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{3} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{250}{9}$.

Задача 85. Најди ја равенката на рамнината која минува низ точката $(3, 2, 1)$ и од координатните оски отсекува отсечки чиишто должини се однесуваат како $3 : 2 : 1$ (од x, y и z-оската, соодветно).

Решение. Рамнината што ја бараме ја означуваме со Σ. Нека сегментниот облик на рамнината гласи:

$$\Sigma : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Од условот на задачата имаме $a : b : c = 3 : 2 : 1$. Значи,

$$\Sigma : \frac{x}{3c} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Бидејќи рамнината минува низ точката M, важи $\dfrac{3}{3c} + \dfrac{2}{2c} + \dfrac{1}{c} = 1$. Оттука, $c = 3$.

Задача 86. Најди равенка на рамнина која минува низ точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ и $C(0, 0, 3)$.

Решение. Ја означуваме бараната рамнина со Σ. Ако е познат нормалниот вектор на рамнината $\vec{n} = [\ A \quad B \quad C\ ]^T$, тогаш од формулата (5.1.2) следува равенката на Σ (за точка може да се избере било која од трите точки дадени во задачата). Значи, проблемот се сведува на барање на нормален вектор на Σ (односно вектор кој што е нормален на кој било вектор од рамнината). Од својства на векторски производ, соодветен вектор $\vec{n}$ е секој векторски производ на два неколинеарни вектора во рамнината Σ. Од друга страна, два вектора кои лежат во рамнината Σ се $\overrightarrow{AB} = [\ -1 \quad 2 \quad 0\ ]^T$ и $\overrightarrow{AC} = [\ -1 \quad 0 \quad 3\ ]^T$. Оттаму,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6-0)\vec{i} - (-3-0)\vec{j} + (0+2)\vec{k} \\ &= [\ 6 \quad 3 \quad 2\ ]^T. \end{aligned}$$

Конечно, со избор на точката A која лежи во рамнината, добиваме:

$$\begin{aligned}\Sigma &: \; 6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0\,,\\ \Sigma &: \quad 6x+3y+2z-6=0\,.\end{aligned}$$

Алтернативно решение. Во согласност со детерминатната равенка на рамнина,

$$\Sigma : \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 87. Најди равенка на рамнина која е нормална на рамнините $\Sigma_1 : x + 2y + 3z + 1 = 0$ и $\Sigma_2 : 3x + 2y + z - 2 = 0$ и минува низ точката $M(1, 2, 3)$.

Решение. За читателот.

5.2 Права

Слично како и рамнината, геометриското место на точки кои задоволуваат некоја од равенките кои ќе бидат дадени во продолжение, се нарекува права. Геометриски гледано станува збор за т.н. еднодимензионален афин потпростор од $\mathbb{R}^3$. Секоја права е еднозначно определена со еден ненулти вектор што е паралелен на неа и со една точка што лежи на правата. Секоја права е еднозначно определена и со две точки што лежат на неа.

5.2.1 Равенки на права

Постојат неколку видови равенки на права.

(*i*) **Векторска равенка на права**. Равенката:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}, \tag{5.2.1}$$

каде што $\vec{r}_0$ е радиус-векторот на точката $M(x_0, y_0, z_0)$ а $\vec{p}$ е произволен ненулти вектор, е **векторска равенка** на права која минува низ точката $M(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторот $\vec{p} = [\ a \quad b \quad c\ ]^T$. Векторот $\vec{p}$ се нарекува *вектор на правец* на правата. Векторската равенка на права може да се запише и во следниот матричен облик:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(*ii*) **Параметарска равенка на права**. Системот:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{array} \right., \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{5.2.2}$$

каде што x_0, y_0, z_0, a, b и c се реални броеви т.ш. барем еден од a, b, c е различен од 0, е **параметарска равенка** на права која минува низ точката $M(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = [\ a \quad b \quad c\ ]^T$.

(*iii*) **Канонична равенка на права**. Равенката:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \tag{5.2.3}$$

каде што x_0, y_0, z_0, a, b и c се реални броеви т.ш. барем еден од a, b, c е различен од 0, е **канонична равенка** на права која минува низ точката $M(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = [\ a \quad b \quad c\ ]^T$ (не е исклучен случајот да некој од броевите a, b, c е 0; ако на пример $a = 0$, тогаш под $\dfrac{x - x_0}{0}$ подразбираме $x - x_0 = 0$; аналогно и во другите случаи).

(*iv*) **Равенка на права низ две точки**. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ се две точки. Тогаш, равенката на правата што минува низ точките M_0 и M_1 е дадена со следната равенка:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{5.2.4}$$

Напоменуваме дека последната равенка е добиена како канонична равенка на права која минува низ точката M_0 и е паралелна на векторот $\overrightarrow{M_0M_1} = [\; x_1-x_0 \quad y_1-y_0 \quad z_1-z_0 \;]^T$.

5.2.2 Агол меѓу две прави

Нека се дадени правите $p : \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{b_1} = \dfrac{z-z_0}{c_1}$ и $q : \dfrac{x-x_0'}{a_2} = \dfrac{y-y_0'}{b_2} = \dfrac{z-z_0'}{c_2}$. Агол меѓу двете прави се дефинира како помалиот агол што го зафаќаат правите. Со други зборови, земајќи вектори $\vec{p} = [\; a_1 \quad b_1 \quad c_1 \;]^T$ и $\vec{q} = [\; a_2 \quad b_2 \quad c_2 \;]^T$, аголот меѓу правите p и q е:

$$\begin{aligned}\measuredangle(p,q) &= \min\{\measuredangle(\vec{p},\vec{q}), \pi - \measuredangle(\vec{p},\vec{q})\}\\ &= \arccos\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Секои две непаралелни прави формираат два агли чиј збир е π. Од договорот дека аголот треба да биде најмногу $\pi/2$, следува формулата (5.2.5).

Задача 88. Најди равенка на права која минува низ точката $M(-1, 2, -3)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = [\; 3 \quad 2 \quad 1 \;]^T$ во:

а) векторски облик;

б) каноничен облик;

в) параметарски облик.

Решение. Радиус-векторот на точката со координати (x_0, y_0, z_0) во однос на координатниот почеток како референтна точка е векторот $[\; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \;]^T$.
а) Нека $\vec{r}$ е радиус-векторот на произволна точка (x, y, z) од правата. Тогаш, векторската равенка на правата е:

$$[x\ y\ z]^T = [-1\ 2\ -3]^T + t[3\ 2\ 1]^T \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{5.2.6}$$

б) Со едноставна замена се добива:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}. \tag{5.2.7}$$

в) Ова е стандардна постапка на параметризација. Нека

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1} = t.$$

Јасно е дека со варирање на x, y, z во множеството реални броеви така што истите да го задоволуваат условот (5.2.7) се добиваат сите можни реални вредности. Од тука добиваме:

$$\begin{cases} x &= -1+3t \\ y &= 2 \quad + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z &= -3+ \ t \end{cases}. \tag{5.2.8}$$

Да забележиме дека параметарскиот и каноничниот облик на равенката на права се добиваат од векторскиот облик на равенката на права. Навистина, од равенката (5.2.6) добиваме $\begin{bmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3t & 2t & t \end{bmatrix}^T$ од каде што следува:

$$\begin{cases} x \quad +1 &= 3t \\ y \quad -2 &= 2t; t \in \mathbb{R} \\ z \quad +3 &= t \end{cases}, \tag{5.2.9}$$

што е параметарскиот облик на правата. Каноничниот облик на правата се добива по изразување на t од секоја од трите равенки во системот (5.2.9) и нивно изедначување.

Задача 89. Најди равенка на права (во каноничен облик) која минува низ точката $M(-1, 2, -3)$ и е паралелна на правата $q : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$.

Решение. Нека p е бараната права. Од условот на задачата, за векторот на правец $\vec{p}$ мора да важи $\vec{p} || \vec{q} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$. Слично како и претходно, за вектор $\vec{p}$ може да го избереме кој било вектор што е паралелен со векторот $\vec{q}$. Избираме $\vec{p} = \vec{q}$. За равенката на правата добиваме:

$$p : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}.$$

Задача 90. Најди равенка на права која минува низ точките $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$.

Решение.Нека бараната права ја означиме со p. Со оглед на тоа дека правата p минува низ точките A и B, за секој вектор на правец $\vec{p}$ важи $\vec{p} || \overrightarrow{AB}$. Избираме $\vec{p} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$. Оттука,

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2}.$$

Задача 91. Во каков заемен однос се правите:

а) $p : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z-5}{8}$ и $q : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-9}{4}$;

б) $p : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-9}{4}$ и $q : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$?

Во случај правите да се сечат, најди ја пресечната точка.

Решение. Две прави во простор може да се сечат, да се паралелни или да се разминуваат. Да забележиме дека две прави во простор се сечат ако и само ако лежат во една рамнина и не се паралелни.

а) Од каноничните равенки на правите заклучуваме дека правата p минува низ точката $P(1,7,5)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = [\ 4 \quad 2 \quad 8\ ]^T$, и дека правата q минува низ точката $Q(3,8,9)$ и е паралелна на векторот $\vec{q} = [\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T$. Го користиме следното својство на мешан производ:

> Векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни (лежат во иста рамнина) ако и само ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Следствено, правите p и q се компланарни ако и само ако $(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}) = 0$. Тогаш, $\overrightarrow{PQ} = [\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T$ (во нашиов случај овој вектор е небитен заради тоа што $\vec{p}||\vec{q}$, меѓутоа од технички причини го пресметуваме) и

$$(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Бидејќи $\vec{p}||\vec{q}$, добиваме паралелност на правите p и q.

б) Ја користиме техниката од а). Правата p минува низ точката $P(3,8,9)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = [\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T$, а правата q минува низ точката $Q(6,-1,0)$ и е паралелна на векторот $\vec{q} = [\ 3 \quad -2 \quad 1\ ]^T$. Добиваме: $\overrightarrow{PQ} = [\ 3 \quad -9 \quad -9\ ]^T$ и

$$(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Заклучуваме дека правите p и q се компланарни. Очигледно $\vec{p} \nparallel \vec{q}$, што повлекува дека p и q се сечат.

Да го најдеме пресекот. Од параметарските равенки на правите

$$p: \begin{cases} x &= 3 &+2t_1 \\ y &= 8 &+ t_1;\ t_1 \in \mathbb{R}, \\ z &= 9 &+4t_1 \end{cases} \quad q: \begin{cases} x &= 6 &+3t_2 \\ y &= -1 &-2t_2;\ t_2 \in \mathbb{R} \\ z &= &t_2 \end{cases},$$

добиваме:

$$\begin{cases} x &= 3+2t_1 = 6+3t_2, \\ y &= 8+t_1 \quad = -1-2t_2, \\ z &= 9+4t_1 = t_2 \end{cases} ;t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad . \tag{5.2.10}$$

Решение на системот е $t_1 = t_2 = -3$. Следствено, пресечната точка на правите е точката $(-3, 5, -3)$.

Задача 92. Најди пример на две прави што се разминуваат.

Решение. Избираме две паралелни рамнини. На секоја од рамнините избираме по една права, така што избраните две прави не се паралелни.

5.3 Заемен однос

5.3.1 Заемен однос на рамнини

Две рамнини во простор можат да имаат или да немаат заедничка точка. Со други зборови, нивниот пресек може да е празен или непразен. Доколку пресекот е празен, велиме дека *рамнинит̄е се ӣаралелни*. Од друга страна, доколку пресекот е непразен, велиме дека *рамнинит̄е се сечаӣ*. Тогаш пресекот е права (ако рамнините се различни) или рамнина (ако рамнините се совпаѓаат). Во продолжение ги разјаснуваме причините позади наведените факти.

Нека $\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ се две (незадолжително различни) рамнини со непразен пресек. Еквивалентно, системот:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{cases} \tag{5.3.1}$$

од две равенки со три непознати x, y, z има барем едно решение (x_0, y_0, z_0) (односно е непротивречен). Со оглед на тоа дека бројот на равенки на овој систем е помал од бројот на непознати, од теоремата на Кронекер-Капели следува дека системот има бесконечно многу решенија. Општото решение се изразува со помош на еден или два слободни параметра. Во првиот случај пресекот на рамнините е права (т.е.

еднодимензионален афин потпростор од $\mathbb{R}^3$), додека во вториот случај пресекот е рамнина (т.е. дводимензионален афин потпростор од $\mathbb{R}^3$). Значи, во првиот случај, секои три точки од пресекот се колинеарни, додека во вториот случај постојат три неколинеарни точки кои се во пресекот на Σ_1 и Σ_2, тогаш добиваме дека $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ (Хилбертова аксиома: низ три неколинеарни точки минува единствена рамнина). Оттаму, заклучокот дека ако две рамнини се сечат, тогаш тие или се совпаѓаат или се сечат во права. Во наредната задача е прикажана техниката за наоѓање експлицитна равенка на пресечната права.

Задача 93. Најди го пресекот на рамнините: $\Sigma_1 : 2x+3y+5z = 3$ и $\Sigma_2 : x+y+2z = 1$.

Решение. Лесно се утврдува дека двете рамнини имаат заедничка точка (на пример точката $(0,1,0)$). Во системот (5.3.7) заменуваме $z = 0$ (потребно е едно решение па за полесно решавање на системот избираме една од променливите да биде 0, најчесто тоа е променливата со најголеми коефициенти). Значи, го решаваме системот

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-3 & = 0 \\ x+y+2z-1 & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} . \tag{5.3.2}$$

Решението на овој систем гласи: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Јасно е дека рамнините Σ_1 и Σ_2 не се совпаѓаат (навистина, имаат непаралелни нормални вектори). Значи, двете рамнини се сечат. Нека со p ја означиме бараната пресечна права. Нејзиниот правец го означуваме со $\vec{p}$, т.е. $\vec{p}$ е произволен ненулти вектор паралелен со правата p. Задачата се сведува на наоѓање на $\vec{p}$ и на наоѓање на една (произволна) точка од правата.

Со оглед на тоа дека $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, важи: $\vec{n}_1 \perp \vec{p}$ и $\vec{n}_2 \perp \vec{p}$, каде што $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ се нормалните вектори на рамнините Σ_1, Σ_2, соодветно. Може да ги користиме:

$$\vec{n}_1 = [\ 2 \quad 3 \quad 5\ ]^T \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = [\ 1 \quad 1 \quad 2\ ]^T.$$

Доволно е да избереме:

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} . \tag{5.3.3}$$

Бидејќи имаме една точка од правата (имено точката $(0,1,0)$) и вектор кој е паралелен на правата (имено $\vec{p} = [\ 1 \quad 1 \quad -1\ ]^T$), добиваме

$$p \,:\, \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Да забележиме дека истата задача може да се формулира и на следниот начин: Најди канонична равенка на правата:

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-3 &= 0 \\ x+y+2z-1 &= 0 \end{cases}. \tag{5.3.4}$$

Задача 94. Пресметај го аголот меѓу правите:

$$\begin{cases} x+2y+z-1 &= 0 \\ x-y-z-1 &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-y-z-1 &= 0 \\ x-y+2z+1 &= 0 \end{cases}. \tag{5.3.5}$$

Решение. Првата права ја означуваме со p а втората со q. Аналогно на претходната задача за правците $\vec{p}$ и $\vec{q}$ добиваме:

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \ \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.3.6}$$

За аголот меѓу правите добиваме:

$$\measuredangle(p,q) = \arccos \frac{|4\,(-3)|}{\sqrt{4^2+4^2}\sqrt{3^2+3^3}} = \arccos \frac{1}{2},$$

од каде што: $\measuredangle(p,q) = \frac{\pi}{3}$.

Во наредната задача се разгледани заемните положби на три рамнини. Еве ги сите можни случаи: (1) рамнините се совпаѓаат, (2) рамнините се сечат во една права, (3) рамнините се сечат во една точка, или (4) рамнините немаат пресечни точки.

Задача 95. Дадени се три рамнини: $\Sigma_1 : 3za^2 - 3a + x + y + 1 = 0$, $\Sigma_2 : 3x - a - y + z(a^2+4) - 5 = 0$ и $\Sigma_3 : za^2 - a - 4x + 9y + 9 = 0$. Да се определи за која вредност на параметарот a, рамнините имаат:

а) бесконечно многу заеднички точки;

б) ниту една заедничка точка;

в) една заедничка точка;

г) Каква е заемната положба на рамнините во претходните случаи?

Решение. Го разгледуваме системот:

$$\begin{cases} x & +y & +3a^2z &= 3a-1 \\ 3x & -y & +(a^2+4)z &= 5+a \\ -4x & +9y & +a^2z &= a-9 \end{cases}.$$

За негово решавање го применуваме Гаусовиот метод на елиминација.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3a^2 & 3a-1 \\ 3 & -1 & a^2+4 & 5+a \\ -4 & 9 & a^2 & a-9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3a^2 & 3a-1 \\ 0 & -4 & 4-8a^2 & 8+8a \\ 0 & 13 & 13a^2 & 13a-13 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3a^2 & 3a-1 \\ 0 & -1 & 1-2a^2 & 2+2a \\ 0 & 1 & a^2 & a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3a^2 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a^2 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 3a+1 \end{array}\right]$$

Доколку $a \neq \pm 1$ главната матрица на системот (истовремено и главната детерминанта на системот е ненулта) има три ненулти пивотни елементи, па системот има единствено решение или трите рамнини се сечат во една точка. За $a = \pm 1$ последната редица (равенка) се состои само од 0, а слободниот член е различен од 0, односно главната матрица на системот има два ненулти пивотни елементи, а целата матрица има три. Од теоремата на Кронекер-Капели ваквиот систем е противречен, што значи дека тогаш рамнините имаат празен пресек. Да забележиме дека за ниту една вредност на параметарот a системот нема бесконечно многу решенија, односно рамнините ниту се совпаѓаат ниту се сечат во една права.

Задача 96. Низ точката $M(1, 2, 3)$ да се повлече права паралелна со правата:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z-4 & =0 \\ x & +2y & -z+1 & =0 \end{array}\right. . \tag{5.3.7}$$

Решение. За читателот.

Задача 97. Да се најде растојанието од точката $M(1, -1, 1)$ до правата:

$$p: \ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

Решение. Од каноничкиот облик на p добиваме дека точката $P(-1, 1, -1)$ лежи на правата p и правецот на правата е $\vec{p} = [\ 1 \quad 2 \quad 3\ ]^T$. Да забележиме дека точката M не лежи на правата. Висината на паралелограмот образуван над векторите $\overrightarrow{PM}$ и $\vec{p}$ спуштена од точката M е растојанието од M до правата p. Го користиме следното својство на векторски производ:

За плоштината P на паралелограмот над векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ важи:

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|\,. \tag{5.3.8}$$

Од друга страна $P = |\vec{p}|h$, што во комбинација со равенката (5.3.8) имплицира:

$$h = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}. \tag{5.3.9}$$

Јасно, $\overrightarrow{PM} = [\ 2 \quad -2 \quad 2\ ]^T$ и $|\vec{p}| = \sqrt{14}$. Исто така,

$$\vec{p} \times \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \ |\vec{p} \times \overrightarrow{PM}| = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}. \tag{5.3.10}$$

Конечно, со замена во равенката (5.3.9), добиваме: $h = 2\sqrt{19}/\sqrt{7}$.

Задача 98. Да се најде растојанието меѓу двете паралелни прави:

$$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}, \ q: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{6}.$$

Решение. Од правата p избираме произволна точка, на пример $P(-1, 2, -3)$. Потоа бараме растојание од P до q. Деталите ги оставаме на читателот.

Задача 99. а) Најди ја ортогоналната проекција на точката $M(7, -1, 0)$ врз рамнината $\Sigma : 2x - z + 1 = 0$.

б) Најди равенка на нормала спуштена од $A(0, -1, 1)$ кон правата

$$p : \begin{cases} y & = -1 \\ x & = 7 - 2z \end{cases}. \tag{5.3.11}$$

в) Најди ја симетричната точка на $M(7, -1, 0)$ во однос на рамнината $\Sigma : 2x - z + 1 = 0$.

г) Најди ја симетричната точка на $A(0, -1, 1)$ во однос на правата

$$p : \begin{cases} y & = -1 \\ x & = 7 - 2z \end{cases}. \tag{5.3.12}$$

Напоменуваме дека *симетрична точка на дадена точка A во однос на дадена рамнина (односно права)* е точката A'' што лежи на нормалата на права (односно рамнина) која минува низ A, а растојанието од A до рамнината (односно правата) е еднакво на растојанието од A'' до рамнината (односно правата).

Решение. а) Точка B е (ортогонална) проекција на точка A врз рамнина π ако и само ако $B \in \pi$ е најблиска до точката A. Според тоа ако B (точка од рамнината π) е проекција на точката A ако и само ако векторот $\overrightarrow{AB}$ е нормален на π.

Проверуваме дали дадената точка M лежи на рамнината Σ. Во потврден случај, проекцијата е самата точка M. Но, во нашиот случај важи $M \notin \Sigma$. Затоа повлекуваме права низ точката $M(7,-1,0)$ со правец $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Оваа права ја означуваме со n. Нејзина канонична равенка е:

$$n\,:\,\frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}. \tag{5.3.13}$$

Правата n е нормална на рамнината Σ, и оттаму проекцијата на точката M е прободот на Σ и правата дадена со равенката (5.3.13). Означувајќи го овој пробод со M', имаме:

$$M'\,:\,\begin{cases} 2x-z+1 & = 0 \\ \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+1}{0} & = \dfrac{z}{-1} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-z+1 & = 0 \\ x & = 7+2t \\ y & = -1 \\ z & = -t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{5.3.14}$$

Решение на последниот систем е $t=-3, x=1, y=-1, z=3$, односно: $M'(1,-1,3)$.
б) За правецот на правата p имаме:

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{5.3.15}$$

Една точка од правата p добиваме избирајќи $z=0$. Тогаш, $x=7, y=-1$. Оваа точка ја означуваме со $M(7,-1,0)$. Следствено, равенката на правата p е дадена со (5.3.13). Низ точката A повлекуваме рамнина Σ која има нормален вектор $\vec{n} = \vec{p}$, односно:

$$\Sigma\,:\,2(x-0)+0(y+1)-(z-1)=0,$$
$$\Sigma\,:2x-z+1=0\,.$$

Сега, задачата се сведува на наоѓање пресек на Σ со правата (5.3.13). Се добива дека тоа е точка $A'(1,-1,3)$, од каде што бараната нормала има равенка:

$$n\,:\,\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}. \tag{5.3.16}$$

в) Го користиме резултатот од а). Според дефиницијата за симетрична точка имаме: $\overline{MM'} = \overline{M'M''}$, при што точките M, M', M'' се колинеарни и лежат на нормала на рамнината Σ. Значи, точката M' е на средишна на отсечката $\overline{MM''}$. Ако

$M''(x'', y'', z'')$, тогаш од врската меѓу координатите добиваме:

$$M'' : \begin{cases} 1 &= \dfrac{7+x''}{2} \\ -1 &= \dfrac{-1+y''}{2} \\ 3 &= \dfrac{z''}{2} \end{cases}, \tag{5.3.17}$$

од каде што: $M''(-5, -1, 6)$.

г) Го користиме резултатот од б). Точките A, A', A'' лежат на правата p и од условот за симетричност, A' е средина на отсечката AA''. Ако $A''(x^*, y^*, z^*)$, тогаш аналогно на в),

$$A'' : \begin{cases} 1 &= \dfrac{x^*}{2} \\ -1 &= \dfrac{-1+y^*}{2} \\ 3 &= \dfrac{1+z^*}{2} \end{cases}, \tag{5.3.18}$$

од каде што: $A''(2, -1, 5)$.

Задача 100. Најди ја симетричната точка на $M(1, 1, 1)$ во однос на:

а) рамнината $\Sigma : 2x + 3y - 5z - 4 = 0$;

б) правата $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$.

Решение. Задачата се решава слично како и претходната задача. Деталите ги оставаме на читателот.

Задача 101. Најди (ортогонална) проекција на правата $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$ врз рамнината $\Sigma : 2x + 3y - 5z - 4 = 0$.

Напоменуваме дека *проекција на права врз рамнина* е множеството од проекции на сите точки од правата врз рамнината. Проекција на права врз рамнина е точка или права. Навистина, ако правата е нормална на рамнината, тогаш проекцијата на правата врз таа рамнина е точка. Во спротивно, доколку проекцијата на правата содржи две различни точки, проекцијата е правата што минува низ тие две точки; еквивалентно, проекцијата е пресек на рамнината врз која проектираме со рамнина што е нормална на првата рамнина и ја содржи правата.

Решение. Повлекуваме рамнина Σ_1 таква што минува низ правата p и е нормална на Σ. Тогаш, бараната права е пресек на рамнините Σ и Σ_1. Значи, проблемот се сведува на наоѓање на Σ_1. Правецот на p е $\vec{p} = [\ 2 \quad -1 \quad 3\ ]^T$, а нормалниот вектор на Σ е $\vec{n} = [\ 2 \quad 3 \quad -5\ ]^T$. Од $\Sigma \perp \Sigma_1$ следува дека $\vec{n} \perp \vec{n}_1$, каде што $\vec{n}_1$ е нормален вектор на Σ_1. Од $p \in \Sigma_1$ следува $\vec{p} \perp \vec{n}_1$. Значи,

$$\vec{n}_1 = \vec{p} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}. \tag{5.3.19}$$

Точка што лежи на Σ_1 е $P(1, -1, 3) \in p$, односно:

$$\Sigma_1 : \ 6(x-1) + 16(y+1) + 8(z-3) = 0,$$
$$\Sigma_1 : \ 3x + 8y + 4z - 7 = 0.$$

Проекцијата на правата p ја означуваме со p' и ја добиваме како:

$$p' : \begin{cases} 2x + 3y - 5z - 4 &= 0 \\ 3x + 8y + 4z - 7 &= 0 \end{cases}. \tag{5.3.20}$$

Остатокот од решението на задачата му го оставаме на читателот за самостојна работа.

Алтернативно решение. Се земаат две точки од правата и се проектираат на рамнината. Низ проекциите на двете точки се повлекува права. Провери дека со оваа постапка се добива истиот резултат како резултатот од претходната задача!

Задача 102. Најди равенка на симетрала на аголот меѓу правите: $p : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-9}{4}$ и $q : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$

Решение. Доколку ни се познати две различни точки од симетралата, со користење на техниката од задачата 90 се добива равенката на истата. Така, проблемот се сведува на добивање на тие (кои било) две различни точки. Правите што го формираат аголот се истите од задачата 91. Пресечната точка на тие прави, добиена во задачата 91, е $(-3, 5, -3)$. Таа е една точка што припаѓа на симетралата.

Да најдеме и втора точка од симетралата. Разгледуваме рамнокрак триаголник со теме во пресечната точка. Тогаш, висината во тој триаголник од темето во кое повлекуваме симетрала е исто така и симетрала на аголот во темето од триаголникот. Правците на правите се $\vec{p} = [\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T$ и $\vec{q} = [\ 3 \quad -2 \quad 1\ ]^T$ и за косинусот од аголот меѓу нив важи:

$$\cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{8}{\sqrt{21}\sqrt{14}} > 0, \tag{5.3.21}$$

од каде што добиваме дека на аголот што го формираат правите е еднаков на аголот што го формираат векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ (во случај вредноста на (5.3.21) да е негативна, тогаш аголот меѓу правите е аголот меѓу векторите $\vec{p}$ и $-\vec{q}$).

Избираме две точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ од правите p и q соодветно, а нивниот пресек го означуваме со S. Притоа, точката P нека е од кракот определен со $\vec{p}$, а Q од кракот определен со $\vec{q}$ кои се на растојание 1 од S. Векторите $\overrightarrow{SP}$ и $\overrightarrow{SQ}$ нека се исто ориентирани со $\vec{p}, \vec{q}$, соодветно (во случај аголот меѓу правите да е $\measuredangle(\vec{p}, -\vec{q})$, точката Q ја избираме така што $\overrightarrow{SQ}$ има ориентација како $-\vec{q}$). Тогаш,

$$\overrightarrow{SP} = [\ x_1+3 \quad y_1-5 \quad z_1+3\ ]^T = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{\sqrt{21}}[\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T,$$
$$\overrightarrow{SQ} = [\ x_2+3 \quad y_2-5 \quad z_2+3\ ]^T = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}[\ 3 \quad -2 \quad 1\ ]^T,$$

(очигледно е дека векторите $\overrightarrow{SP}$ и $\overrightarrow{SQ}$ се насочени како $\vec{p}$ и $\vec{q}$, соодветно) од каде што $P(-3+\frac{2}{\sqrt{21}}, 5+\frac{1}{\sqrt{21}}, -3+\frac{4}{\sqrt{21}})$ и $Q(-3+\frac{3}{\sqrt{14}}, 5-\frac{2}{\sqrt{14}}, -3+\frac{1}{\sqrt{14}})$. Средишната точка на отсечката PQ, означена со $S'(x^*, y^*, z^*)$, лежи на симетралата од каде што:

$$S' : \begin{cases} x^* &= \frac{1}{2}\left(-3+\frac{2}{\sqrt{21}}-3+\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = -3+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \\ y^* &= \frac{1}{2}\left(5+\frac{1}{\sqrt{21}}+5-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = 5+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \\ z^* &= \frac{1}{2}\left(-3+\frac{4}{\sqrt{21}}-3+\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = -3+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \end{cases}.$$

Значи, $\overrightarrow{SS'} = \frac{1}{2}[\ \frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{3}{14} \quad \frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{2}{\sqrt{14}} \quad \frac{4}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\ ]^T$, односно симетралата е:

$$\frac{x+3}{\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{3}{\sqrt{14}}} = \frac{x-5}{\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{2}{\sqrt{14}}} = \frac{z+3}{\frac{4}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{14}}}.$$

Алтернативно решение. Нека $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ се единечни вектори колинеарни со $\vec{p}$ и $\vec{q}$, соодветно. Тогаш, $\vec{p}_0 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{[\ 2 \quad 1 \quad 4\ ]^T}{\sqrt{21}}$ и $\vec{q}_0 = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{[\ 3 \quad -2 \quad 1\ ]^T}{\sqrt{14}}$. Векторите $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ формираат ромб, па векторот $\vec{p}_0 + \vec{q}_0$ е едната дијагонала на ромбот. Дијагоналата на ромбот е истовремено и симетрала на соодветниот агол. Одовде, симетралата на аголот помеѓу правите p и q е паралелна со $\vec{p}_0+\vec{q}_0$ и минува низ пресечата точка на двете прави (имено, точката $(-3, 5, -3)$), па равенката на симетралата гласи:

$$\frac{x+3}{\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{3}{\sqrt{14}}} = \frac{x-5}{\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{2}{\sqrt{14}}} = \frac{z+3}{\frac{4}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{14}}}.$$

5.4 Дополнителни задачи

Задача 103. Да се напише равенка на рамнина со нормален вектор $\vec{n} = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]^T$ која минува низ точката $(-1, -2, -3)$.

Задача 104. Да се напише равенка на рамнина која минува низ точките: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$ и $C(0, 0, 3)$.

Задача 105. Да се напише равенка на рамнина која минува низ точката $A(2, 2, 2)$, а на координатните оски отсекува еднакви сегменти.

Задача 106. Под каков агол се сечат рамнините: $x = 0$ и $y = 1$?

Задача 107. Да се напише равенка на рамнина на која лежат точките $A(1, 1, 1)$ и $B(4, 3, 2)$ и е паралелна со векторот $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Задача 108. Да се пресмета растојанието од точката $A(-2, 5, 7)$ до рамнината $x - y + z = 1$.

Задача 109. Да се напише равенка на рамнина која минува низ точката $A(1, 1, 1)$ и е нормална на рамнините: $x = 3$ и $z = 1$.

Задача 110. Најди равенка на рамнина на растојание d од $x + 2y + 3z = 4$.

Задача 111. Низ точката $M(-5, -16, 12)$ се повлечени две рамнини, едната ја содржи x-оската, а другата y-оската. Да се пресмета аголот меѓу нив.

Задача 112. Да се напише равенка на рамнина нормална на рамнината $2x + 2y + 4z - 5 = 0$, која минува низ точките $(-2, 0, 0)$ и $(0, \frac{2}{3}, 0)$.

Задача 113. Да се најде множеството од сите точки кои се на еднакво растојание од точките $A(1, 1, 1)$ и $B(-1, -1, -1)$.

Задача 114. Која точка од рамнината $\Sigma : x + 4y - 3z = 12$ е најблиску до координатниот почеток? Најди ја проекцијата на координатниот почеток врз рамнината Σ.

Задача 115. Низ точката $A(1, 2, 3)$ да се повлече права паралелна со правата

$$p : \begin{cases} x - y + z - 4 &= 0 \\ 2x + y - 2z + 5 &= 0 \end{cases} .$$

Задача 116. Дадени се правите p и q со:

$$p:\begin{cases} x-y+z-4 &= 0\\ 2x+y-2z+5 &= 0\end{cases} \text{ и } q:\begin{cases} x+y+z-4 &= 0\\ 2x+3y-z &= 6\end{cases}.$$

а) Да се одреди нивната заемна положба;

б) Доколку правите се сечат, да се најде аголот меѓу нив. А, доколку се паралелни или разминувачки, да се пресмета растојанието меѓу нив.

Задача 117. Да се најде аголот меѓу рамнината $x+2y-z=0$ и правата $x=3, y=z$. Под *агол меѓу права и рамнина* се подразбира аголот што го зафаќа правата и ортогоналната проекција на правата врз рамнината.

Задача 118. Во која точка и под кој агол правата $\dfrac{x+1}{2}=y-2=\dfrac{z-1}{-1}$ ја прободува рамнината $3x-2y+z=3$?

Задача 119. Дадени се точката $A(0,1,2)$ и правата $p:\dfrac{x-1}{2}=y=z+10$. Да се најде равенка на рамнина која ги содржи правата p и точката A.

Задача 120. Да се докаже дека правата $p:\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ лежи во рамнината $\Sigma: 4x-3y+7z-7=0$.

Задача 121. Да се најде проекцијата на правата $p:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ врз рамнината $\Sigma: -x+y-3z+10=0$.

Задача 122. Да се определи точка која што е симетрична на точката $P(1,1,2)$ во однос на правата $p:\begin{cases} x-2y-3z+12=0\\ 2x+y-2z+3=0\end{cases}$.

Задача 123. Во која точка се сечат рамнините: $2x-y+3z=9$, $x+2y+2z-3=0$ и $3x+y-4z+6=0$?

Задача 124. Да се пресмета волуменот на пирамидата која ја формираат координатните рамнини и рамнината $x+2y+3z=24$.

Задача 125. На правата $p:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$ да се најде точка на растојание 4 од точката $M(1,2,3)$.

Задача 126. Дадени се рамнините: $\Sigma_1: x+2y+3z=4$ и $\Sigma_2: x+2y+3z=6$. Најди го множеството на точки кои што се на еднакво растојание од рамнините Σ_1 и Σ_2.

Задача 127. Дадени се правите: $p : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ и $q : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$. Најди го множеството точки кои што се на еднакво растојание од правите p и q.

Глава 6

Функции од две променливи

6.1 Дефиниција

Во оваа секција се ограничуваме на функции од две променливи заради нивната геометриска интерпретација. Причина за ограничувањето е тоа што теоријата за функции од повеќе променливи е потехничка и без соодветна геометриска интерпретација.

Да се потсетиме дека произволно правило f со кое на секој елемент u од множество D му се придружува единствен елемент $v = f(u)$ од множество V се нарекува *пресликување* од D во V, со ознака $f : D \to V$. Множеството $\Gamma_f = \{(u, f(u)) : u \in D\}$ е *график* на пресликувањето. (Не е погрешно ако пресликувањето f се поистоветува со неговиот график Γ_f.) Доколку $V \subseteq \mathbb{R}$ зборуваме за (реална) функција f. Ако притоа $D \subseteq \mathbb{R}^2$, односно секој u е подреден пар (x, y) од реални броеви, тогаш f е *функција од две променливи* x, y. Функција од две или повеќе променливи може да биде зададена во една од следните форми.

(*i*) **Експлицитен облик**. Ако z може да се изрази во облик $f(x, y)$, тогаш се означува со:

$$f : D \to V,\ z = f(x, y).$$

Во текстот z се нарекува слика на паротот (x, y), а множествата D и V се *домен* и *кодомен*, соодветно. Ако множеството D е најголемо можно, така што f е дефинирана на D, тогаш велиме дека D е *дефинициона област* на f и ја означуваме со D_f или D_z, а $f(D_f)$ е *множество од вредности* на f и го означуваме со V_f.

(*ii*) **Имплицитен облик**. Ако постои зависност на x, y и z од облик $F(x, y, z) = 0$, тогаш велиме дека функцијата f е зададено имплицитно.

Геометриски гледано, доменот на $z = f(x, y)$ е подмножество од рамнината $\mathbb{R}^2$, додека множеството точки (x, y, z) (графикот) на функцијата f е подмножество од просторот $\mathbb{R}^3$.

(*iii*) **Параметарски облик**. Ако постои $I \subseteq \mathbb{R}$ така што:

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t);\ t \in I \\ z &= z(t) \end{cases},$$

тогаш велиме дека функцијата $F : I \to \mathbb{R}^3$, $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$, е зададена параметарски.

6.2 Дефинициона област

Во наредните задачи определи и скицирај ја дефиниционата област на дадените функции.

Задача 128. $z = x^3 + 2xy^3 - 7$.

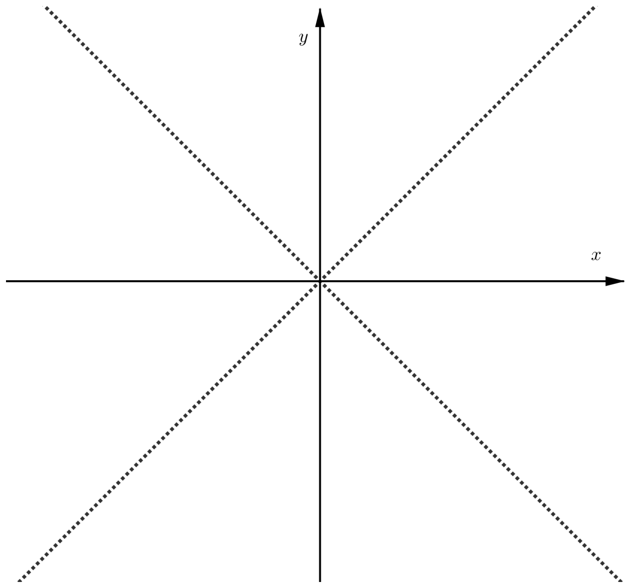
Решение. Дадената функција е полином по x и y кој е дефиниран за сите реални парови (x, y). Затоа $D_z = \mathbb{R}^2$.

Задача 129. а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, б) $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, в) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Решение. Да се потсетиме дека делење со 0 не е дефинирано. Оттаму, го заклучуваме следното:
а) Функцијата е дефинирана за сите вредности $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за кои важи $x^2 + y^2 \neq 0$, односно $D_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Аналогно се изведуваат и следните заклучоци.
б) $D_z = \mathbb{R}^2$. в) $D_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x), (x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$. Дефинициоката област на оваа задача е прикажана на сликата 6.1.

Задача 130. $z = \sqrt{4 - x^2 - \dfrac{y^2}{9}}$.

Решение. Коренова функција со парен коренов показател $(2, 4, 6, \ldots)$ е дефинирана само за ненегативен аргумент (поткоренова вредност). Оттаму, множеството



Слика 6.1: Дефинициона област за функцијата од задачата 129 в).

D_z од сите точки во $\mathbb{R}^2$ за кои што коренот $\sqrt{4 - x^2 - \dfrac{y^2}{9}}$ е дефиниран е определно со:

$$D_z \,:\, 4 - x^2 - \frac{y^2}{9} \geq 0\,,$$

односно

$$D_z \,:\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} \leq 1\,.$$

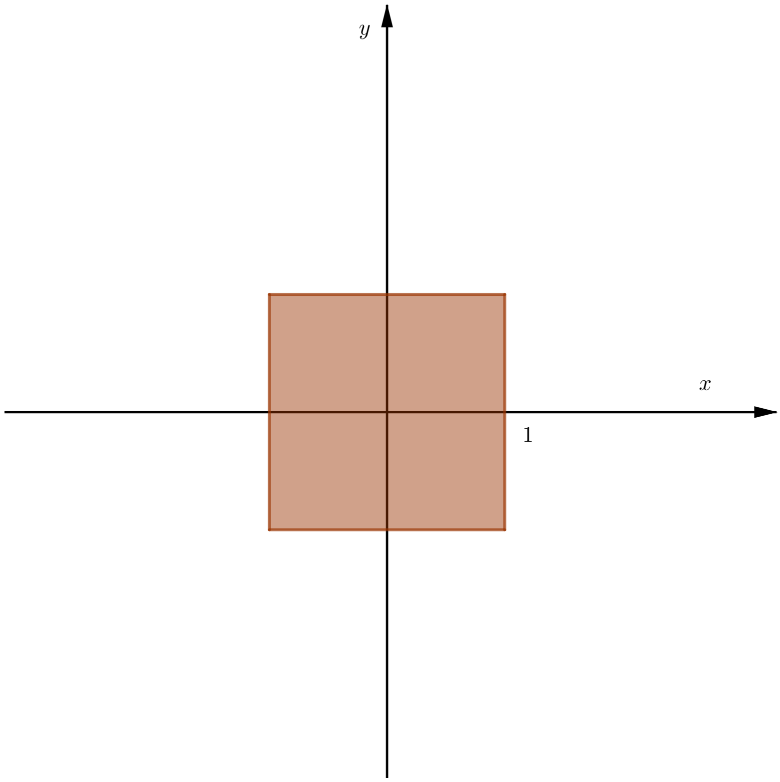
Геометриската интерпретација на ова множество е централна елипса со полуоски 2 и 6 (сите точки во внатрешноста и сите точки од работ, односно од елипсата).

Задача 131. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Решение. D_z е множеството од сите точки во $\mathbb{R}^2$ каде што обата корена се дефинирани, односно:

$$D_z \,:\, \begin{cases} 1 - x^2 & \geq 0 \\ 1 - y^2 & \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 & \leq x \leq 1 \\ -1 & \leq y \leq 1 \end{cases}. \tag{6.2.1}$$

Станува збор за квадрат (внатрешноста и работ) со темиња во $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$. Оваа дефинициона област е прикажана на сликата 6.2.



Слика 6.2: Дефинициона област на функцијата од задачата 131.

Задача 132. $z = \sqrt{y \sin x}$

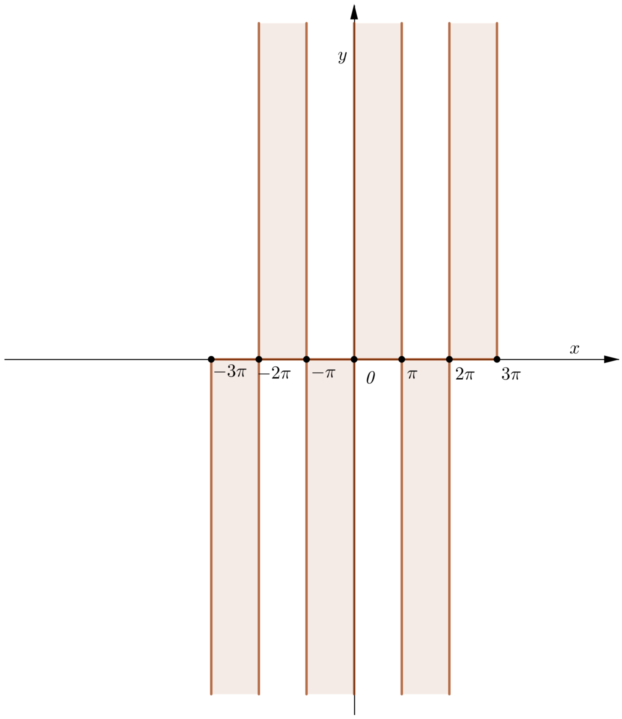
Решение. D_z е множеството од точките (x, y) за кои коренот е дефиниран, односно точките за кои производот $y \sin x$ е ненегативен. Имаме:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y & \geq 0 \\ \sin x & \geq 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y & \leq 0 \\ \sin x & \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in \{[2k\pi, (2k+1)\pi] | k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y \leq 0 \\ x \in \{[(2k+1)\pi, 2k\pi] | k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \end{array}\right. . \tag{6.2.2}$$

Оваа дефинициона област е прикажана на сликата 6.3.

Задача 133. а) $z = \ln x + \ln y + \ln(xy)$, б) $z = \ln(x^2 \cos y)$.

Решение. Логоритамската функција е дефинирана само за позитивен аргумент. Затоа дефиниционата област во задачата а) гласи: $D_z = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$. Определувањето на дефиниционата област во задачата б) го оставаме за самостојна работа на читателот.



Слика 6.3: Дефинициона област на функцијата од задачата 132.

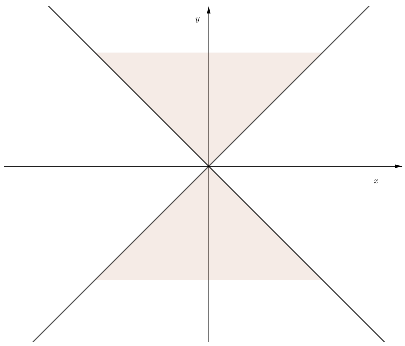
Задача 134. $z = \arctan \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Решение. Бидејќи $\arctan x$ е дефиниран за сите $x \in \mathbb{R}$, функцијата $\arctan \dfrac{1}{x^2+y^2}$ има иста дефинициона област како и функцијата $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, односно за било кои $x, y \neq 0$. Заклучуваме дека $D_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Задача 135. $z = \sqrt{x \ln(y-x)}$.

Решение.

$$D_z : \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x & \geq 0 \\ \ln(y-x) & \geq 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x & \leq 0 \\ \ln(y-x) & \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x & \geq 0 \\ y-x & \geq 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x & \leq 0 \\ 0 & \leq y-x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$



Слика 6.4: Дефиниционата област на функцијата од Задача 136.

$$D_z : \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq x+1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x & \leq 0 \\ x & \leq y \leq 1+x. \end{cases} \end{array} \right. \tag{6.2.3}$$

Графичката презентација на дефиниционата област ја оставаме на читателот.

Задача 136. $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{y^2}}$.

Решение. Функцијата е дефинирана ако $1 - \dfrac{x^2}{y^2} \geq 0$, односно ако $\left|\dfrac{x}{y}\right| \leq 1$. Одовде имаме дека функцијата е дефинирана за $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|, y \neq 0\}$. До истиот резултат можеме да дојдеме и на следниот начин:

$$D_z : -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ -y \leq x \leq y \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y < 0 \\ -y \geq x \geq y \end{cases} \end{array} \right. .$$

Дефиниционата област на функцијата е прикажана на сликата 6.4.

Задача 137. а) $z = \arctan(xy)$;

б) $z = \arcsin(xy)$;

в) $z = \arccos(xy)$.

Решение. а) Функцијата arctan е дефинирана на целото множество $\mathbb{R}$. Затоа, $D_z = \mathbb{R}^2$. Од друга страна, функциите arcsin и arccos се дефинирани кога аргументот е во сегментот $[-1, 1]$. Оттаму, функциите $z = \arcsin(xy)$ и $z = \arccos(xy)$ се дефинирани само кога $-1 \leq xy \leq 1$. Деталите и графичката презентација на дефиниционите области ги оставаме на читателот.

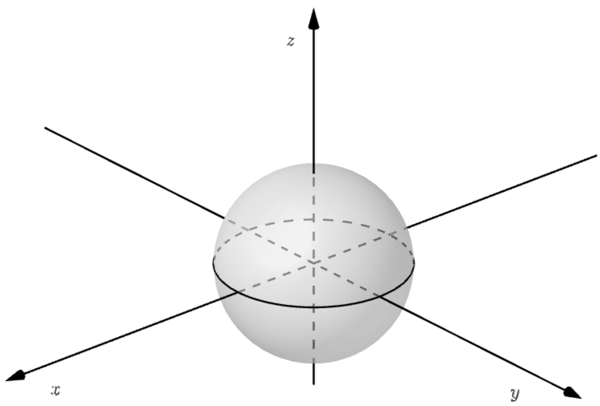
6.3 Површини од втор ред

Во текстот кој следува разгледуваме *површини од втор ред*, како множества точки (x, y, z) од просторот $\mathbb{R}^3$ кои задоволуваат соодветна равенка.

1) **Сфера**:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \tag{6.3.1}$$

со центар (x_0, y_0, z_0) и радиус R. Види ја сликата 6.5.



Слика 6.5: Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$.

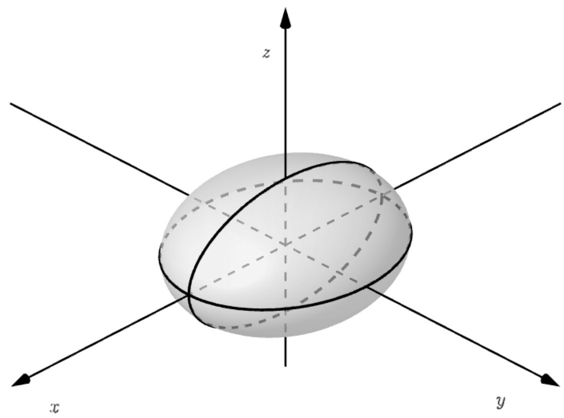
2) **Елипсоид**:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{6.3.2}$$

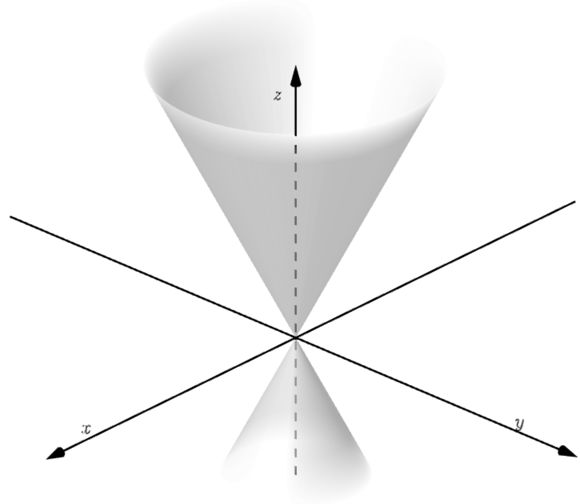
со центар во (x_0, y_0, z_0), што на оските отсекува отсечки со должини a, b, c, соодветно. Види ја сликата 6.6.

3) **Двокрилен конус**:

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \tag{6.3.3}$$



Слика 6.6: Елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0.$

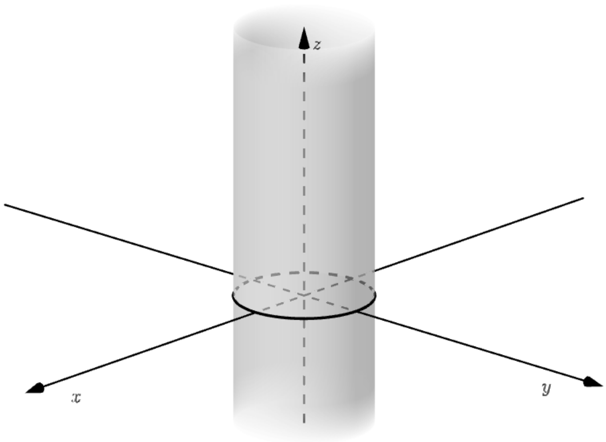


Слика 6.7: Двокрилен конус $z^2 = x^2 + y^2$.

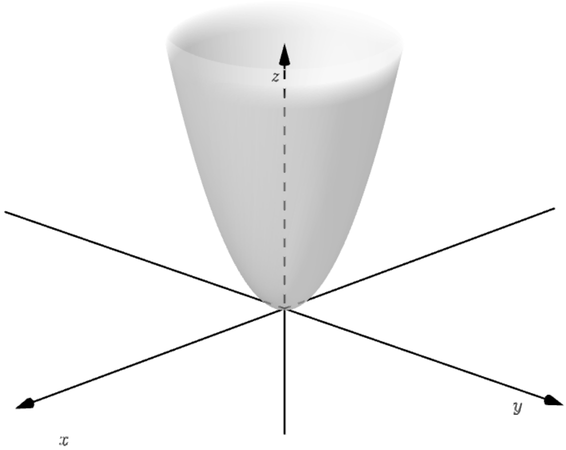
со теме во точката (x_0, y_0, z_0) и оска паралелна со $z-$оската. Види ја сликата 6.7. *Еднокрилните конуси* се од облик (со истото теме)

$$z = z_0 + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \text{ и } z = z_0 - \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad (6.3.4)$$

каде што првата равенка одговара на делот од конусот што се наоѓа над рамнината $z = z_0$, а другата равенка на делот од конусот под рамнината $z = z_0$.



Слика 6.8: Цилиндар $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$.



Слика 6.9: Параболоидот $z = x^2 + y^2$

4) **Елиптичен цилиндар**:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{6.3.5}$$

со оска која минува низ точката $(x_0, y_0, 0)$ и е паралелна со $z-$оската. Кружен цилиндар е даден на сликата 6.8.

5) **Елиптичен параболоид**:

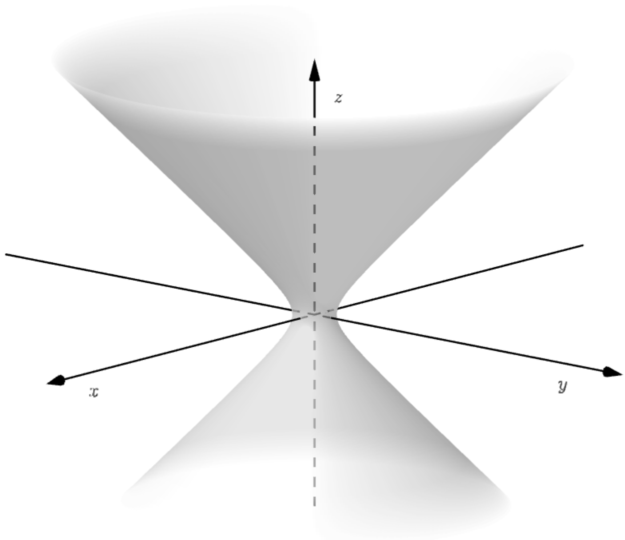
$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}. \tag{6.3.6}$$

со теме во точката (x_0, y_0, z_0), полуоски a, b и оска паралелна со $z-$оската. Кружен параболоид е даден на сликата 6.9.

6) **Еднокрилен хиперболоид**:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \tag{6.3.7}$$

со теме во точката (x_0, y_0, z_0) и оска паралелна со $z-$оската. Види ја сликата 6.10.



Слика 6.10: Еднокрилен хиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

7) **Двокрилен хиперболоид**:

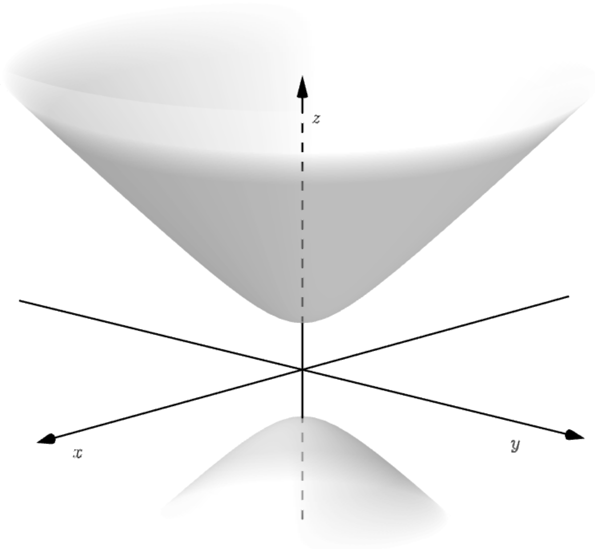
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \tag{6.3.8}$$

со теме во точката (x_0, y_0, z_0) и оска паралелна со $z-$оската. Види ја сликата 6.11.

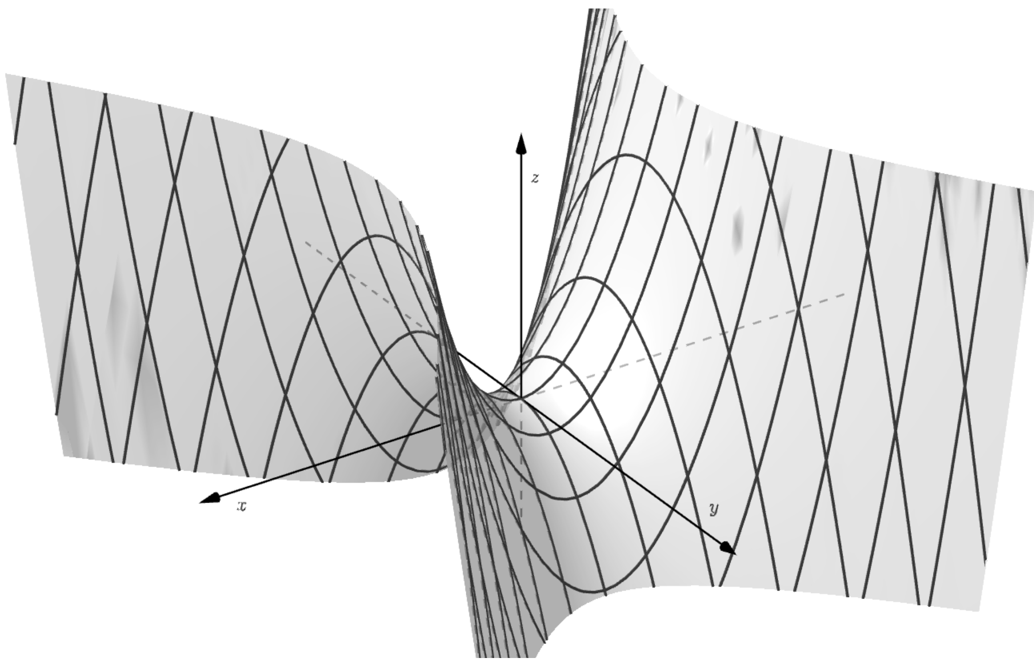
8) **Хиперболичен параболоид**:

$$z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2} \tag{6.3.9}$$

со теме во точката (x_0, y_0, z_0) и оска паралелна со $z-$оската. Види ја сликата 6.12.



Слика 6.11: Двокрилен хиперболоид $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$



Слика 6.12: Хиперболичен параболоид $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

Ако $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ во горенаведените равенки, тогаш се добиваат централизираните верзии на соодветните површини. Со избор $a = b$ во (6.3.5), односно (6.3.6) се добиваат класични (кружни) цилинар и параболоид, соодветно.

Површината дадена со равенката (6.3.5) е типичен пример на *цилиндрична* површина. Во формулата може да се забележи дека не постои зависност меѓу променливите x и y со z, односно z може да биде произволен. Тоа значи дека површината за која станува збор ги содржи сите точки од правата (x, y, t), каде (x, y) е една точка од површината во пресек со $z = 0$ и t е произволен реален број. Од тие причини, велиме дека површината е цилиндрична со *оска*, во конкретниот случај $oz-$правата.

За која и да е површина, можно е да се разгледуваат аналогни површини со различни оски од тие наведени во дефинициите. Притоа, треба да се води сметка дека x, y, z се врзани со x, y, z-оските соодветно (замена на a со b-оска значи замена на a со b во равенката на површината).

6.4 Парцијални изводи од прв ред

Нека $z = f(x, y)$, каде што x и y се две независни променливи. Аналогно на извод на функција од една променлива, се дефинираат *парцијален извод по* x и *парцијален извод по* y од функцијата $z = f(x, y)$ во точка (x_0, y_0):

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\triangle \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\triangle \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle) - f(x_0, y_0)}{\triangle},$$

соодветно. Од дефиницијата на парцијален извод заклучуваме дека функцијата од две променливи се третира како функција од една променлива (со фиксирање на другата променлива). Заради тоа правилата за диференцирање се пренесуваат. Аналогно на случајот на функција од една променлива, и во овие околности важат правилата за диференцирање на сложена функција.

Во следните задачи најди ги првите парцијални изводи на дадените функции.

Задача 138. а) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$; б) $z = \arctan \dfrac{x}{y}$.

Решение. а) Користиме дека $(\arctan t)' = \dfrac{1}{1 + t^2}$ и добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\,(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

б) Резултатот се добива со замена на променливите x и y, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Задача 139. $z = x^{y^2}$

Решение. Користиме дека: $(a^t)' = a^t \ln a; (t^a)' = at^{a-1}$; $a = const$, и добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 x^{y^2-1},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^{y^2}\ \ln x \cdot \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = 2x^{y^2}\ y \ln x.\end{aligned}$$

Задача 140. $z = \dfrac{x+e^{xy}}{x+y}$.

Решение. Го користиме правилото за диференцирање на количник, т.е.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

и добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(1+e^{xy}y)(x+y)-(x+e^{xy})}{(x+y)^2},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xe^{xy}(x+y)-(x+e^{xy})}{(x+y)^2}.\end{aligned}$$

Задача 141. $z = x^y + y^x$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y$.

Бидејќи x и y имаат симетрични улоги во дефинијата на функцијата z, односно $z(x,y) = z(y,x)$, првиот извод по y се добива директно од првиот извод по x.

Задача 142. $z = \sqrt{x+\sqrt{y}}$.

Решение. За читателот.

Задача 143. $z = \ln(\ln(\ln(x^2+y^3)))$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\ln(\ln(x^2+y^3))}\frac{\partial(\ln(\ln(x^2+y^3)))}{\partial x}\\
&= \frac{1}{\ln(\ln(x^2+y^3))}\,\frac{1}{\ln(x^2+y^3)}\,\frac{\partial(\ln(x^2+y^3))}{\partial x}\\
&= \frac{1}{\ln(\ln(x^2+y^3))}\,\frac{1}{\ln(x^2+y^3)}\,\frac{1}{x^2+y^3}\frac{\partial(x^2)}{\partial x}\\
&= 2x\,\frac{1}{\ln(\ln(x^2+y^3))}\,\frac{1}{\ln(x^2+y^3)}\,\frac{1}{x^2+y^3}.
\end{aligned}$$

На ист начин се добива и дека: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2\,\dfrac{1}{\ln(\ln(x^2+y^3))}\,\dfrac{1}{\ln(x^2+y^3)}\,\dfrac{1}{x^2+y^3}$.

Нека со $F(x,y,z)=0$ е имплицитно зададена функцијата $z=z(x,y)$ (зависноста на функцијата z од променливите x и y може да биде експлицитна). Парцијалните изводи од z, по променливите x и y, се дефинираат со:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{6.4.1}$$

соодветно.

Задача 144. Пресметај: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ако $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Равенката на сфера ја запишуваме преку релацијата $F(x,y,z)=0$ каде што:

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2.$$

Очигледно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Користејќи ги равенките (6.4.1), добиваме: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{2z} = -\dfrac{x}{z}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{2z} = -\dfrac{y}{z}$.

Задача 145. Пресметај: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ако $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Равенката на параболоидот е $F(x,y,z)=0$, каде што:

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Со примена на (6.4.1) се добиваат бараните парцијални изводи.

Задача 146. Пресметај: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ако:

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 5$;

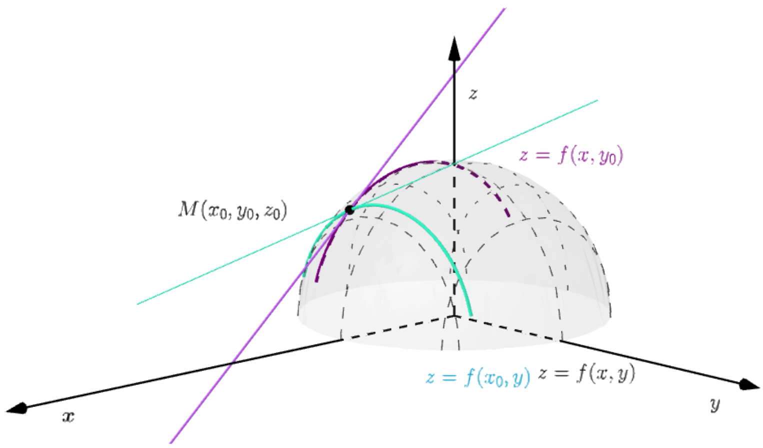
б) $e^z = xyz$;

в) $x^{yz} + y^{xz} + z^{xy} = 0$.

Решение. За читателот.

6.5 Тангентна рамнина и нормална права

Во оваа секција даваме геометриско толкување на парцијалните изводи од прв ред. Нека е дадена површина: експлицитно со $z = f(x, y)$ или имплицитно со $F(x, y, z) = 0$. За определување на тангентна рамнина и нормална права (скр. нормала) на површината во дадена точка потребни се вредностите на парцијалните изводи $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ во таа точка.

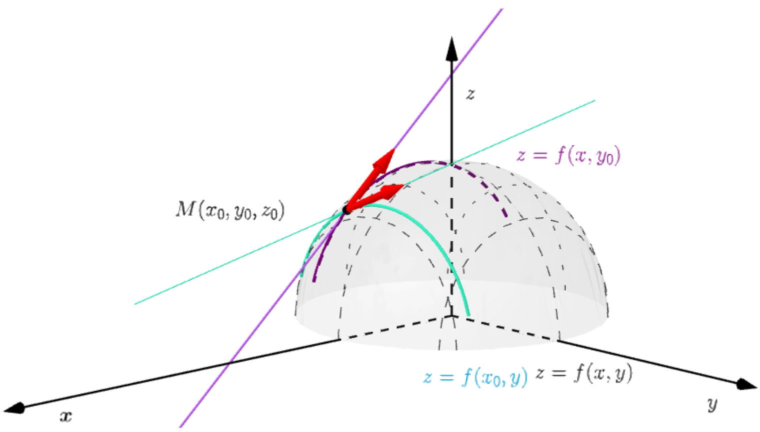


Слика 6.13: Кривите $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$.

Нека $z = f(x, y)$. Функциите $z_1 = f(x_0, y)$ и $z_2 = f(x, y_0)$ се функции од една променлива y и x, соодветно. Овие функции ги претставуваат кривите кои се добиваат како пресек на графикот на функцијата $z = f(x, y)$ и рамнината $x = x_0$, односно $y = y_0$ (види ја сликата 6.13).

Точката $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \equiv M(x_0, y_0, z_0)$ се добива како пресек на овие две криви. Тангентната рамнина во точката M ја определуваат тангентните прави на кривите $z_1 = f(x_0, y)$ и $z_2 = f(x, y_0)$, односно тоа е рамнината која ги содржи овие две прави; ја означуваме Σ_T (види ги сликите 6.14 и 6.15).

Нормален вектор на тангентната рамнина е секој векторски производ на паралелни вектори на двете тангентни прави (види ја сликата 6.15). Од теоријата на функции од една променлива, знаеме дека правецот на секоја тангентна права е определен со вредноста на изводот на функцијата во таа точка. Нормала на дадената површина во точката $M(x_0, y_0, z_0)$ е правата која е нормална на тангентнатата рамнина и минува низ точката M. Нормалата во продолжение ќе ја означуваме со n. Јасно дека нормалниот вектор на тангентната рамнина е паралелен (во пракса ќе земаме дека се еднакви) со векторот на нормалата. Нормалата на површината $z = f(x, y)$ во точката M е прикажнана на сликата 6.15.



Слика 6.14: Векторите на тангентните прави на кривите $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$ во точката (x_0, y_0) се означени со црвено.

Да ги изведеме равенките за тангентна рамнина и нормала.

Експлицитен облик. Тангентната рамнина на површината $z = f(x,y)$ во точка $M(x_0, y_0, z_0)$ е дадена со формулата:

$$\Sigma_T \, : \, \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}(y - x_0) - (z - z_0) = 0. \tag{6.5.1}$$

Нормала на површината $z = f(x,y)$ во точка $M(x_0, y_0, z_0)$ е правата дадена со формулата:

$$n \, : \, \frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{6.5.2}$$

Тука $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$ е вредноста на првиот извод по променливата x во точката (x_0, y_0). Аналогно, $\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}$ е вредноста на првиот извод по променливата y во точката (x_0, y_0).

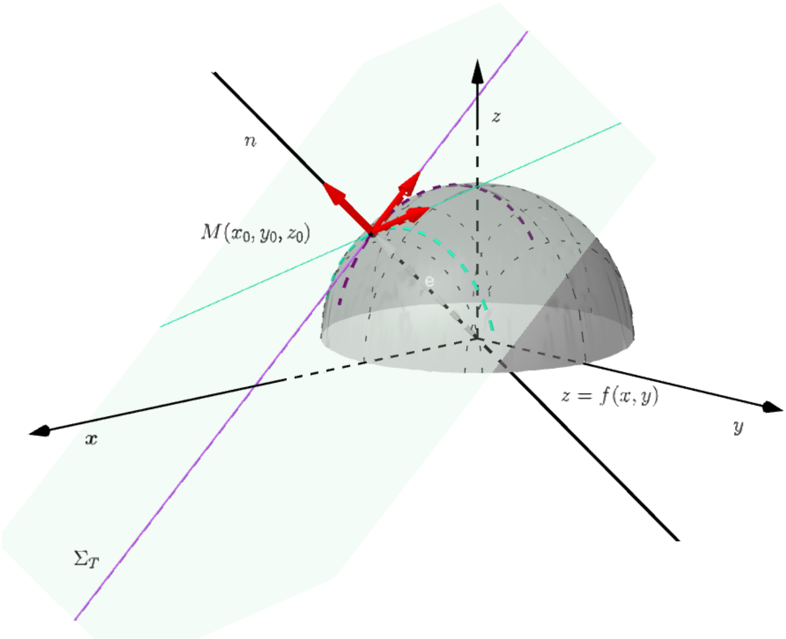
Имплицитен облик. Тангентната рамнина на површината $F(x,y,z) = 0$ во точка $M(x_0, y_0, z_0)$ е дадена со формулата:

$$\Sigma_T \, : \, \frac{\partial F}{\partial x}|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - x_0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0. \tag{6.5.3}$$

Нормала на површината $F(x,y,z) = 0$ во точка $M(x_0, y_0, z_0)$ е правата дадена со формулата:

$$n \, : \, \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}|_{(x_0,y_0,z_0)}}. \tag{6.5.4}$$

Исто како во претходниот случај, $\dfrac{\partial F}{\partial x}|_{(x_0,y_0,z_0)}$ е вредноста на изводот $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ во точката (x_0, y_0, z_0). Аналогно, $\dfrac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0,z_0)}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}|_{(x_0,y_0,z_0)}$ се вредностите на изводите $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ во точката (x_0, y_0, z_0), соодветно.



Слика 6.15: Тангентната рамнина и нормала во точката M.

Задача 147. Напиши равенка на тангентна рамнина и нормала на површината $z = x^2y + y^3$ во точка $M(-1, 1, -1)$.

Решение. Првите парцијални изводи во точката $M(-1, 1, -1)$ се:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy, & \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, -1) &= -2; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 + 3y^2, & \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, -1) &= 4. \end{aligned}$$

Од равенките (6.5.1) и (6.5.2) следуваат:

$$\begin{aligned} \Sigma_T &: -2(x+1) + 4(y-1) - 1(z+1) = 0, \\ \Sigma_T &: -2x + 4y - z - 7 = 0, \\ n &: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}. \end{aligned}$$

Задача 148. Во која точка од површината $y = x^2 + z^2$ тангентната рамнина е паралелна со рамнината $x + 2y + 3z = 1$?

Решение. Дадената површината е параболоид. Запишана во имплицитна форма е $F(x, y, z) = x^2 - y + z^2 = 0$. Нека бараната точка е $M(a, b, c)$. Бидејќи таа точка лежи на површината, важи $b = a^2 + c^2$. Пресметуваме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Од равенката (6.5.4) нормалниот вектор на рамнината Σ_T во точка M е $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2a & -1 & 2c \end{bmatrix}^T$. Според условот на задачата, $\vec{n} \parallel [\ 1 \quad 2 \quad 3\ ]^T$, односно:

$$\begin{bmatrix} 2a & -1 & 2c \end{bmatrix}^T = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Последното равенство е еквивалентно со:

$$\begin{cases} 2a &= \lambda \\ -1 &= 2\lambda \\ 2c &= 3\lambda \\ a^2 + c^2 &= b \end{cases}. \tag{6.5.5}$$

Решението на системот е: $(-1/4, 5/8, -3/4)$.

Задача 149. Докажи дека сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z = 24$ и елипсоидот $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ се допираат во точката $(1, 1, 2)$. Две површини се *допираат* во точката $M(x_0, y_0, z_0)$ ако имаат иста тангентна рамнина во точката $M(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Равенките на елипсоидот и сферата ги запишуваме во имплицитен облик $F(x, y, z) = 0$ и $G(z, y, z) = 0$, односно:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = &\quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0, \\ G(x, y, z) = &\quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z - 24 = 0. \end{aligned}$$

Очигледно, $F(1, 1, 2) = 0$ и $G(1, 1, 2) = 0$, од каде што добиваме дека точката $(1, 1, 2)$ е заедничка за двете површини. Од

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

добиваме:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 2) = 6, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 2) = 4, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2) = 4,$$

односно нормалниот вектор на тангентната рамнина на елипсоидот во точката $(1, 1, 2)$ е $\vec{n}_F = [\ 6 \quad 4 \quad 4\ ]^T$. Аналогно, од равенката на сферата добиваме:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 8, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z - 8,$$

па:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(1,1,2)=-6, \qquad \frac{\partial G}{\partial y}(1,1,2)=-4, \qquad \frac{\partial G}{\partial z}(1,1,2)=-4.$$

Значи, нормалниот вектор на тангентната рамнина на сферата во точката $(1,1,2)$ е $\vec{n}_G = [\ -6 \quad -4 \quad -4\ ]^T$. Бидејќи $\vec{n}_F$ и $\vec{n}_G$ во точката $(1,1,2)$ се колинеарни, заклучуваме дека двете површини имаат иста тангентна рамнина: $\Sigma : 3x+2y+2z+9=0$.

Задача 150. Во која точка од површината $x^2+y^2+z^2=4$ тангентната рамнина е паралелна со рамнината $x+2y+3z+6=0$?

Решение. За читателот.

Задача 151. Докажи дека тангентната рамнина во произволна точка од површината $xyz=C>0$ формира со координатните рамнини тетраедар со константен волумен. Пресметај ја вредноста на тој волумен.

Решение. Нека Σ_T е тангентна рамина на површината во точката $M(x_0,y_0,z_0)$ и нека $F(x,y,z)=xyz-C=0$. За парцијалните изводи имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}&=yz,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=y_0z_0,\\
\frac{\partial F}{\partial y}&=xz,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=x_0z_0,\\
\frac{\partial F}{\partial z}&=xy,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=x_0y_0.
\end{aligned}$$

Равенката на тангентната рамнина гласи:

$$\begin{aligned}
\Sigma_T &: y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,\\
\Sigma_T &: y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z-3x_0y_0z_0=0,\\
\Sigma_T &: y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3C,\\
\Sigma_T &: \frac{y_0z_0x}{3C}+\frac{x_0z_0y}{3C}+\frac{x_0y_0z}{3C}=1,\\
\Sigma_T &: \frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1.
\end{aligned}$$

На координатните оски, Σ_T отсекува сегменти со должини $|3x_0|$, $|3y_0|$ и $|3z_0|$, соодветно. Оттаму, волуменот на споменатиот тетраедар е: $V=\dfrac{|3x_0 3y_0 3z_0|}{6}=\dfrac{27C}{6}=\dfrac{9C}{2}$.

Задача 152. Најди го реалниот параметар m, така што рамнината $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{m}=1$ го допира елипсоидот $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$.

Решение. Нормалниот вектор на рамнината $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{m}=1$ е $\vec{n}=[1/6\ \ 1/3\ \ 1/m]^T$, додека нормалниот вектор на тангентната рамнина на елипсоидот $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$ во точка (x_0,y_0,z_0) е $\vec{n}_T=[x_0/3\ 2y_0/3\ \ z_0]^T$. Од условот на задачата следува дека постои реален број $\lambda>0$, така што:

$$\lambda[1/6\ \ 1/3\ \ 1/m]^T=[x_0/3\ 2y_0/3\ \ z_0]^T,$$

што е еквивалентно на системот:

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda/2 \\ y_0 &= \lambda/2 \\ z_0 &= \lambda/m \end{cases}.$$

Исто така, тројката (x_0,y_0,z_0) ја задоволува равенката на рамнината, но и равенката на елипсоидот. Значи, по замената во равенките на површините добиваме:

$$\lambda(3m^2+12)=12m^2$$

и

$$\lambda^2(3m^2+12)=24m^2,$$

соодветно. Конечно, $\lambda=2$, од каде што следува дека $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2/m)$. Следно, заменуваме (x,y,z) со $(1,1,2/m)$ во равенките на рамнината и елипсоидот и притоа добиваме: $2/m^2=1/2$, односно $m=\pm 2$.

6.6 Парцијални изводи од повисок ред

Бидејќи $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ се функции од x и y, за секој парцијален извод има смисла повторно парцијално да се диференцира. Така се добиваат следните *втори парцијални изводи*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}). \tag{6.6.1}$$

Задача 153. Пресметај ги вторите парцијални изводи на функцијата:

$$z=3x^2y^3-7x^3y+x^3-3x-4y+12.$$

Решение. Првите парцијални изводи се:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3-21x^2y+3x^2-3, \tag{6.6.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 7x^3 - 4. \tag{6.6.3}$$

За вторите добиваме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6xy^3 - 21x^2y + 3x^2 - 3) \\
&= 6y^3 - 42xy + 6x, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(6xy^3 - 21x^2y + 3x^2 - 3) \\
&= 18xy^2 - 21x^2, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(9x^2y^2 - 7x^3 - 4) \\
&= 18x^2y.
\end{aligned}$$

Оставаме за читателот да провери дека $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Задача 154. Докажи дека $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ за функцијата $z = \arctan \dfrac{x}{y}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

За вторите мешани парцијални изводи добиваме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Задача 155. Пресметај $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, каде што $z = z(x, y)$ е зададена со:

а) $z = y \ln(1 + xy)$;

б) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

6.7 Екстремни вредности

Нека $z = f(x, y)$ е функција која е дефинирана и непрекината на некоја област (подмножество од xoy-рамнината $\mathbb{R}^2$). Целта на оваа секција е да појасниме како се пронаоѓаат точките од оваа област во кои функцијата z достигнува локални екстреми (максимуми или минимуми).

Функцијата $z = f(x, y)$ има *локален максимум* во точка (x_0, y_0) ако постои $\varepsilon > 0$, така што:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_0 + \triangle_1, y_0 + \triangle_2)$$

за секои $|\triangle_1| < \varepsilon$ и $|\triangle_2| < \varepsilon$.

Функцијата $z = f(x, y)$ има *локален минимум* во точка (x_0, y_0) ако постои $\varepsilon > 0$, така што:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0 + \triangle_1, y_0 + \triangle_2)$$

за секои $|\triangle_1| < \varepsilon$ и $|\triangle_2| < \varepsilon$.

Стационарни точки. Потребен услов за постоење на локален екстрем на функцијата z во точка (x_0, y_0) е таа точка да го задоволува системот:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = 0 \end{array} \right. . \tag{6.7.1}$$

Решенијата на системот (6.7.1) се нарекуваат *стационарни точки*.

Доволен услов. Нека функцијата $z = f(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи од втор ред во стационарна точка (x_0, y_0). Означуваме:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ ,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{6.7.2}$$

и нека A_0, B_0, C_0 се вредностите на A, B, C во точката (x_0, y_0).

I. $A_0 \neq 0$.
Ако $A_0C_0 - B_0^2 > 0$, тогаш во точката (x_0, y_0) функцијата z има локален екстрем. Притоа:

(*i*) ако $A_0 > 0$, тогаш во точката (x_0, y_0) функцијата z има локален минимум,

(*ii*) ако $A_0 < 0$, тогаш во точката (x_0, y_0) функцијата z има локален максимум.

Ако $A_0C_0 - B_0^2 < 0$, тогаш во точката (x_0, y_0) функцијата z нема локален екстрем.

Доколку $A_0C_0 - B_0^2 = 0$, можно е функцијата да има, но можно е и да нема локален екстрем во точката (x_0, y_0).

II. $A_0 = 0$.

(*i*) ако $B_0 \neq 0$, тогаш во точката (x_0, y_0) функцијата z нема локален екстрем,

(*ii*) доколку $B_0 = 0$, тогаш можно е функцијата да има но можно е и да нема локален екстрем во точката (x_0, y_0).

Најди ги стационарните точки за функциите $z = f(x, y)$ во следните задачи.

Задача 156. $z = 6xy - x^2 - y^2$.

Решение. Го решаваме системот:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y - 2x &= 0 \\ 6x - 2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 3y \\ 8y &= 0 \end{cases} . \tag{6.7.3}$$

Заклучуваме дека единствена стационарна точка е $S_1(0, 0)$.

Задача 157. $z = 6xy - x^3 - y^3$.

Решение. За читателот.

Задача 158. $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4 & = 0 \\ -2y + 2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 1 \end{cases}, \tag{6.7.4}$$

Заклучуваме дека единствена стационарна точка е $S_1(2, 1)$.

Задача 159. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, за $0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$ и $0 \leq y \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x - \sin(x + y) & = 0 \\ \cos y - \sin(x + y) & = 0 \end{cases}, \tag{6.7.5}$$

Оттука, добиваме дека $\cos x = \sin(x + y) = \cos y$, односно:

$$\cos x = \cos y.$$

Решението на последното равенство е: $y \in \{x + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ (следува од периодичноста и парноста на функцијата $\cos x$). Од условот $0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$ и $0 \leq y \leq \dfrac{3\pi}{2}$ следува дека за x, y ќе бидат исполнети некои од случаите: $x + y = 0$, $x + y = \pi$, $x + y = 2\pi$ или $x + y = 3\pi$. Ако $x + y \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$, важи $\sin(x + y) = 0$. Тогаш,

$$\cos x = 0, \text{ односно } x = \frac{\pi}{2} \text{ или } x = \frac{3\pi}{2}. \tag{6.7.6}$$

Во секој од горенаведените случаи добиваме:

$$y = -\frac{\pi}{2} \text{ или } y = -\frac{3\pi}{2};$$
$$y = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ или } y = \pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2};$$
$$y = \frac{3\pi}{2} \text{ или } y = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2};$$
$$y = 3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ или } y = \frac{3\pi}{2};$$

соодветно. Ако $x = y$, тогаш со замена во една од равенките од системот (6.7.5) добиваме:

$$\cos x - \sin(2x) = 0,\ \cos x - 2\sin x \cos x = 0,\ \cos x(1 - 2\sin x) = 0. \tag{6.7.7}$$

Следствено, $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Значи $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Стационарните точки се:

$$S_1(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}),\ S_2(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ S_3(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), S_4(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), S_5(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \text{ и } S_6(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}).$$

Задача 160. Пресметај го најмалото растојание меѓу правите:

$$p\ :\ \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-16} = \frac{z+4}{2} \quad \text{и } q\ :\ \frac{x-27}{2} = \frac{y+25}{1} = \frac{z-1}{-2}. \tag{6.7.8}$$

Решение. Правите ги запишуваме во параметарски облик.

$$p\ :\ \begin{cases} x & = 5 + t_1 \\ y & = -16t_1 \\ z & = -4 + 2t_1 \\ t_1 & \in \mathbb{R} \end{cases},\ q\ :\ \begin{cases} x & = 27 + 2t_2 \\ y & = -25 + t_2 \\ z & = 1 - 2t_2 \\ t_2 & \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{6.7.9}$$

Користиме ознака $r(t)$ за точката на правата r што се добива со замена на t во параметарската равенка на r. Задачата може да се преформулира вака:

Најди броеви $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такви што за точките $P = p(t_1), Q = p(t_2)$ растојанието $d(P, Q) = \overline{PQ}$ е минимално.

Нека t_1, t_2 се такви броеви. Тогаш,

$$d(P, Q) = \sqrt{(22 + 2t_2 - t_1)^2 + (-25 + t_2 + 16t_1)^2 + (-5 - 2t_2 - 2t_1)^2}. \tag{6.7.10}$$

Да забележиме дека ако t_1, t_2 се такви што $(d(P, Q))^2$ е минимално, тогаш $d(P, Q)$ е, исто така, минимално (поентата на тоа што ќе работиме со d^2 е диференцирањето да се сведе на диференцирање на поткореновата вредност). Значи, бараме локални екстреми (минимуми) на функција:

$$f(t_1, t_2) = (22 + 2t_2 - t_1)^2 + (-25 + t_2 + 16t_1)^2 + (-5 - 2t_2 - 2t_1)^2. \tag{6.7.11}$$

За наоѓање на стационарните точки го решаваме системот:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t_1} & = 29t_1 + 2t_2 - 48 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial t_2} & = 2t_1 + t_2 + 1 = 0 \end{cases}, \tag{6.7.12}$$

и добиваме: $t_1 = 2, t_2 = 5$. Единствена стационарна точка е $S_1(2,5)$. За вторите изводи имаме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} & = 29 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2} & = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_2 \partial t_1} = 2 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} & = 1 \end{cases} . \tag{6.7.13}$$

Значи, $A_0 = 29, B_0 = 2, C_0 = 1$, од каде што $A_0C_0 - B_0^2 = 29 - 4 = 25 > 0$. Следствено, во точката $S_1(2,5)$ функцијата f има локален екстрем. Бидејќи $A_0 > 0$, заклучуваме дека f достигнува минимална вредност. Таа изнесува $f(2,5) = 225$ од каде

$$d(P,Q) = \sqrt{225} = 15.$$

Задача 161. Најди ги локалните екстреми на:

а) Функцијата дадена во задачата 156;

б) Функцијата дадена во задачата 158;

в) Функцијата дадена во задачата 159.

Задача 162. Најди ги екстремните вредности на функцијата $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$ на триаголникот со темиња $(-1,-2)$, $(0,1)$ и $(2,-2)$, вклучувајќи ја и неговата внатрешност.

Решение. Стационарните точки се добиваат кога првите парцијални изводи на функцијата $z = z(x,y)$ ќе се изедначат на 0. Со други зборови, овие точки се решенија на системот:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = 0 \end{cases} ,$$

односно:

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} .$$

Да забележиме дека единствената стационарна точка припаѓа во областа во која бараме екстрем. Од вторите парцијални изводи се определува природата на екстремот. Пресметуваме: $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $D =$

$AC - B^2 = 4$. Бидејќи тука $D > 0$, во оваа точка има локален екстрем. Од $A_0 > 0\,(C_0 > 0)$, заклучуваме дека станува збор за локален минимум. Во точката $N_1(0,0)$ функцијата z достигнува вредност $z_{N_1} = 5$.

Со оглед на тоа дека испитуваме екстреми на затворена и ограничена област, треба да се испитаат и рабовите на областа. Нека темињата на областа ги означиме со: $P(-1,-2)$, $Q(2,-2)$ и $R(0,1)$.

- На отсечката PQ имаме: $y = -2$, $-1 \leq x \leq 2$. Така, $z(x,-2) = f_1(x) = x^2+1$. Бараме екстреми на функцијата на интервалот $[-1,2]$, па затоа ја оценуваме функцијата $f_1(x)$ во нејзините стационарни точки и во крајните точки на интервалот. Стационарните точки на оваа функција се добиваат кога првиот извод ќе се изедначи на 0, $f_1'(x) = 2x = 0$. Одовде, стационарна точка е точката $N_2(0,-2)$. Со директна пресметка се добива: $z_{N_2} = 1$, $z_P = 2$ и $z_Q = 5$.

- На отсечката QR имаме: $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Така, $z(x, -\dfrac{3}{2}x + 1) = -\dfrac{5}{4}x^2 + 3x + 4 = f_2(x)$. Оваа функција има стационарна точка $x = \dfrac{6}{5}$. Од $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$ ја добиваме точката $N_3(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{4}{5})$, и пресметуваме дека $z_{N_3} = 5,8$. За темето R важи: $z_R = 4$.

- На отсечката PR имаме: $y = 3x+1, -1 \leq x \leq 1$. Сега, $z(x,y) = z(x, 3x + 1) = -8x^2 - 6x + 4 = f_3(x)$. Слично како и на отсечката QR, единствена стационарна точка е $x = -\dfrac{3}{8}$, односно точката $N_4(-\dfrac{3}{8}, -\dfrac{1}{8})$. Се добива дека: $z_{N_4} = \dfrac{41}{8}$.

Конечно, од добиените резултати е очигледно дека функцијата z достигнува максимум во точката N_3, а минимум во точката N_2.

Задача 163. Најди ги екстремните вредности на функцијата $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y$ во областа $x^2 + y^2 \leq 16$.

Решение. Како и во претходната задача, стационарните точки се добиваат кога првите парцијални изводи на функцијата $z = z(x,y)$ ќе се изедначат на 0. Значи, овие точки се решенија на системот:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = 2x + 4 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = 2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -2 \\ y & = 2 \end{cases}.$$

Со пресметување на вторите парцијални изводи се определува природата на евентуалниот екстрем: $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$. Значи, $A_0 = 2, B_0 = 0$, $C_0 = 2$ и $A_0C_0 - B_0^2 = 4 > 0$.

- Точката $N_1(2, -2)$ припаѓа во областа $x^2+y^2 \leq 16$. Бидејќи $A_0C_0 - B_0^2 = 4 > 0$ и $A_0 > 0$, во оваа точка има локален минимум. Се добива дека $z_{N_1} = -8$.

Со оглед на тоа дека испитуваме екстреми на затворена и ограничена област, треба да се испитаат и рабовите на областа, како и нејзините темиња (ако има). Областа во оваа задача е ограничена со кружницата $x^2 + y^2 = 16$, па оваа кружница ја запишуваме во параетарски облик $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$. Функцијата $z(x, y)$ на кружницата го има следниот облик:

$$z = z(x(t), y(t)) = (4\cos t)^2 + (4\sin t)^2 + 16\cos t - 16\sin t = 16(1 + \cos t - \sin t).$$

Стационарната точка на оваа функција се добива кога првиот извод ќе се изедначи на 0, т.е. $z'(t) = -16\sin t - 16\cos t = 0$. Од последната равенка се добива $\sin t = -\cos t \iff \tan x = -1$. Значи функцијата има две стационарни точки: $t = -\pi/4$ и $t = 3\pi/4$, односно $N_2(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ и $N_3(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, соодветно.

- За $N_2(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ имаме: $z_{N_2} = z(\pi/4) = 16(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}) = 16(1+\sqrt{2}) \approx 38,6$.
- За $N_3(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ имаме: $z_{N_3} = z(3\pi/4) = 16(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 16(1 - \sqrt{2}) \approx -6,6$.

Конечно, од добиените резултати е очигледно дека функцијата z достигнува максимум во точката N_2, а минимум во точката N_1.

Задача 164. Една компанија развила модел според кој заработувачката зависи од бројот на продадени бонбони x (мерени во илијади) и бројот на часови TV реклами y, според следната функција:

$$z = f(x, y) = 48x + 96y - x^2 - 2xy - 9y^2,$$

каде z се мери во илјади денари. Максималниот број на бонбони кои компанијата може да ги произведе е 50 000, а максималниот број на часови за TV реклами е 25. Определи ги x и y така што профитот ќе се максимизира.

Решение. За да го максимизираме профитот потребно е да го најдеме максимумот на функцијата $f(x, y) = 48x + 96y - x^2 - 2xy - 9y^2$, на областа определена со $0 \leq x \leq 50$ и $0 \leq y \leq 25$.

Спроведувајќи ја претходно изложената постапка се добива дека профитот е максимален ако компанијата произведува 21 000 бонбони, а се рекламира 3 часа.

Условни екстреми. Екстремите на функцијата $z = f(x, y)$ за кои важи дополнителен услов $\varphi(x, y) = 0$ се нарекуваат условни екстреми. Тие се бараат како слободни екстреми на функцијата:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \tag{6.7.14}$$

Задача 165. Најди ги екстремите не функцијата $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y$ при услов $x + 2y = 7$.

Решение. Најпрво ја формираме функцијата:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - \lambda(x + 2y - 7),$$

и потоа ги бараме нејзините слободни екстреми. Од првите парцијални изводи на F се добиваат стационарните точки:

$$\begin{cases} 2x - 2 - \lambda & = 0 \\ 8y + 8 - 2\lambda & = 0 \\ x + 2y & = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 1 + \lambda/2 \\ y & = -1 + \lambda/4 \\ 7 & = 1 + \lambda/2 - 2 + 2\lambda/4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 & = 5 \\ y_0 & = 1 \\ \lambda & = 7 \end{cases}.$$

Одовде добиваме дека точката $(5, 1)$ е стационарна точка и вредноста на функцијата во неа е 27. За точката $(5, 1)$ потврдуваме дека во таа точка се достигнува локален минимум откако ќе ја споредиме со други точки кои го исполнуваат условот, на пример $(7, 0)$ и $(0, 7/2)$. Во овие точки функцијата прима вредности $f(7, 0) = 35 > 7$ и $f(0, 7/2) = 77 > 27$.

Задача 166. Даден е триаголник со должини на страните a, b, c и плоштина P. Да се најде точка од внатрешноста на триаголникот, така што збирот од квадратите на растојанијата од таа точка до страните на триаголникот е најмал.

Решение. Нека точката M е избрана во внатрешноста на триаголникот ABC како што е наведено во задачата. Нека растојанијата на точката M до страните a, b и c се x, y и z, соодветно. Тогаш, плоштината P на $\triangle ABC$ може да се пресмета како сума на плоштините на $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ и $\triangle AMC$:

$$P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}.$$

Функцијата која треба да се минимизира е сумата од растојанијата на точката M до страните на триаголникот, т.е. $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, но притоа треба да важи дополнителниот услов $2P = xa + by + cz$. Затоа ја разгледуваме функцијата:

$$U(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2P - ax - by - cz).$$

Од првите парцијални изводи по x, y, z и λ се добиваат стационарните точки:

$$\begin{cases} 2x - \lambda a = 0 \\ 2y - \lambda b = 0 \\ 2z - \lambda c = 0 \\ 2P = ax + by + cz \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\lambda a}{2} \\ y = \dfrac{\lambda b}{2} \\ z = \dfrac{\lambda c}{2} \\ 2P = \lambda \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \dfrac{2Pa}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_0 = \dfrac{2Pb}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z_0 = \dfrac{2Pc}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \lambda = \dfrac{4P}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}.$$

За да докажеме дека во точката $M(x_0, y_0, z_0)$ се достигнува минимална вредност, поаѓаме од неравенството:

$$2P = ax + by + cz \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Последното наравенство е познато како неравенство на Коши-Шварц. Оттука,

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{6.7.15}$$

Исто така,

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{4P^2a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{4P^2b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{4P^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Неравенството (6.7.15) е исполнето за сите реални броеви x, y, z. Заклучуваме дека функцијата U достигнува минимална вредност во точката $M(x_0, y_0, z_0)$.

Неравенство на Коши-Шварц. За секои $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ важи:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \tag{6.7.16}$$

при што равенство е исполнето ако и само ако $(a_1, a_2, a_3) = \lambda(b_1, b_2, b_3)$ за некој $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказот следува од очигледното неравенство:

$$0 \le (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2.$$

Параболата (гледана како квадратна функција) е ненегативна за секој $x \in \mathbb{R}$ единствено ако нејзината дискриминанта е непозитивна. Имајќи предвид дека:

$$\begin{aligned} &(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2 \\ &\qquad = \big(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\big)x^2 + 2\big(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\big)x + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \end{aligned}$$

за дискриминатната D имаме:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leq 0.$$

Карактеризацијата на тоа кога се достигнува равенство е очигледно точна.

Задача 167. Во елипсоидот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ впиши паралелопипед чии страни се паралелни со координатните оски, така што волуменот е максимален.

Решение. Нека P е паралелопипедот со максимален волумен и нека (x, y, z) е темето на паралелопипедот кое се наоѓа во I-октант. Тогаш, заради условот за паралелност добиваме: $V = 8xyz$ и

$$V(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$$

за функцијата на волумен на паралелопипедот впишан во елипсоидот. Значи, задачата се сведува на наоѓање на екстремни врдности на волуменската функција. Деталите ги оставаме на читателот.
Да напоменеме дека волуменската функција не достига минимална вредност затоа што едната од страните на паралелопипедот може да се избере произволно мала, од каде и волуменот произволно мал.

6.8 Дополнителни задачи

Задача 168. Колку променливи има следната функција:

а) $f(x + y) = (\sin y - \cos x)^2 + 0,5 \sin 2x \sin 2y$;

б) $f\left(x, \dfrac{x}{y}\right) = \ln x(\ln x - \ln y)$.

Задача 169. Нека $f(x, y) = x^2 - y$. Пресметај: $f(1, 2)$, $f(2, 1)$, $f(-2, 4)$ и $1/f(2, 1)$.

Задача 170. Нека $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$. Определи ги кривите за кои $f(x, y) = c$, $c \in \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$.

Задача 171. Определи ја дефиниционата област на следната функција:

а) $z = \arcsin{(x/y)}$; б)$z = \ln\ln(x - y)$;

в) $z = \ln\sin(x - y)$; г) $z = \arcsin x + \arcsin \dfrac{x}{y}$.

Задача 172. Скицирај ги следните функции:

а) $z = 3 - \sqrt{x^2 - y^2}$; б)$z = 3 + \sqrt{x^2 - y^2}$;

в) $z = 1 + x^2 + (y-1)^2$; г) $z = x^2 - 1$.

Задача 173. Пресметај ги првите парцијални изводи на функцијата:

а) $z = x^8 e^3 y$; б) $z = \sin(3x)\cos(3y)$;

в) $z = e^{xy}\cos x \sin y$; г) $z = \ln(xy)$.

Задача 174. Пресметај ги првите парцијални изводи во $(1, 2)$ и $(2, -1)$ за функцијата:

а) $z = \dfrac{xy}{x-y}$; б) $z = e^{-x}\cos y$; в) $z = x^2 - 3xy + y^2$.

Задача 175. За функцијата $z = z(x, y)$ дадена со $xy - xz\ln(yz) = 1$, пресметај ги парцијалните изводи од прв ред. Најди ги тангентната рамнина и нормалата на $z = z(x, y)$ во точката $(1, 1, z_0)$.

Задача 176. Докажи дека $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ако $u(x, y) = \sin(3x - 2y) + \cos(x + 4y)$.

Задача 177. Пресметај ги парцијалните изводи од втор ред на функцијата:

а) $z(x, y) = e^x \sin(x + y^2)$; б) $z(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$; в) $z(x, y) = (x + 2y)^2 \ln \dfrac{x}{y}$.

Задача 178. Напиши равенка на тангентна рамнина и нормала на површината $z(x, y) = x^3 - x^2 y + y^2 - 2x + 3y - 2$ во точката $M(-1, 3)$.

Задача 179. Дадена е површината $S : 3(yx + zx + xy) = xyz$.

а) Пресметај ги првите парцијални изводи: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

б) Напиши ја равенката на тангентната рамнина на површината S во точката $(-1, 1, z_0)$ што лежи на S.

Задача 180. Докажи дека произволна тангентна рамнина на површината: $z^2 = x^2 + y^2$ минува низ координатниот почеток.

Задача 181. Докажи дека нормалата во произволна точка од сферата: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0$ минува низ координатниот почеток.

Задача 182. Најди ги локалните екстреми на функцијата:

а) $z(x, y) = x^3 + +3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$;

б) $z(x, y) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 y}$;

в) $z(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$.

Задача 183. Пресметај ги најголемата и најмалата вредност на функцијата

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 4x - 2y + 24$$

во областа зададена со: $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$.

Задача 184. Пресметај ги најголемата и најмалата вредност на функцијата

$$f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 8x + 2y + 3$$

во областа зададена со: $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 3$.

Задача 185. Затворена картонска кутија е направена од различни материјали; за дното на кутијата се користи материјал кој чини 20 ден/m^2, а за страните и капакот се користи материјал кој чини 10 ден/m^2. Најди ги димензиите на кутијата со најголем волумен која може да се направи за 360 денари.

Задача 186. Која е максималната разлика помеѓу x и y, ако точката (x, y, z) лежи на површината $x^2 + y^2 + xy = 1$?

Задача 187. Која е најодалечената точка од $(0, 0, 1/2)$ која лежи на елипсоидот $4x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$?

Задача 188. Ако постојат, определи ги најблиската и најдалечната точка од конусот $z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ до координатниот почеток.

Глава 7

Двојни интеграли

7.1 Поим, геометриско значење и пресметување

Двоен интеграл од функција $z = f(x,y)$ на правилна област D се дефинира со формулата:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x, \qquad (7.1.1)$$

каде што:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \qquad (7.1.2) \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \le y \le d, \psi_1(x) \le x \le \psi_2(x)\}. \end{aligned}$$

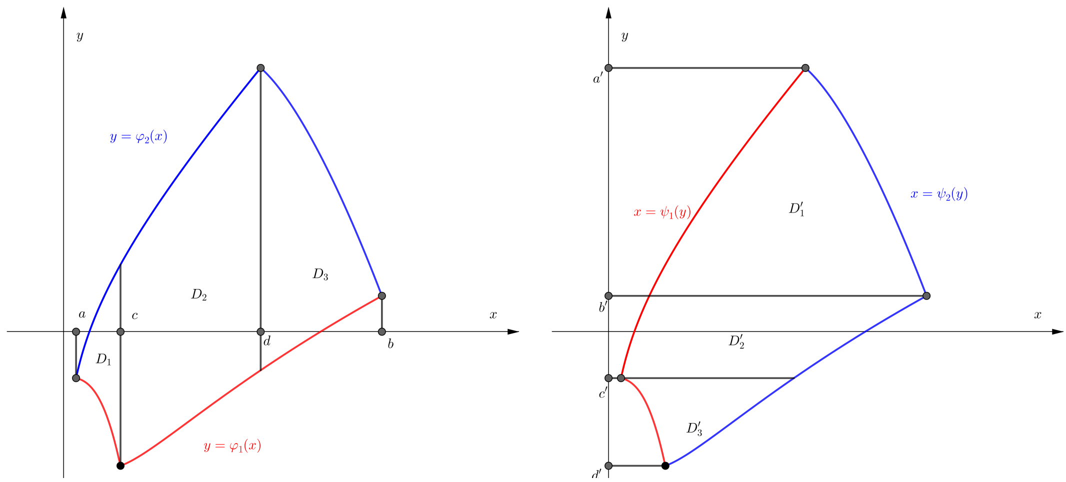
Ако областа D е правоаголна, тогаш користиме ознака:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

На сликата 7.1. се прикажани области во двата можни случаи бидејќи правилната област D дадена со равенката (7.1.2) може да има две репрезентации. Со црвена боја се означени функциите φ_1, ψ_1 а со сина боја функциите φ_2, ψ_2.

Ако областа на интеграција, D, во формулата (7.1.2) може да запише како $D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$ така што $D_i \cap D_j$ е најмногу отсечка, тогаш:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + ... + \iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (7.1.3)$$



I случај $\qquad\qquad$ II случај

Слика 7.1: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$.

На сликата 7.1. е прикажана областа на интеграција D при двата најчести начини на разложување. Имено, во првиот случај се избира x од некој од интервалите $(a, c), (c, d), (d, b)$ и за соодветниот избор се разгледуваат точките од областа D, односно точките од отсечката $\{(x, y)|\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Аналогно се третира и вториот случај, при што се заменуваат улогите на x и y односно φ и ψ.

Задача 189. Определи ги границите на интеграција на $\displaystyle\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што:

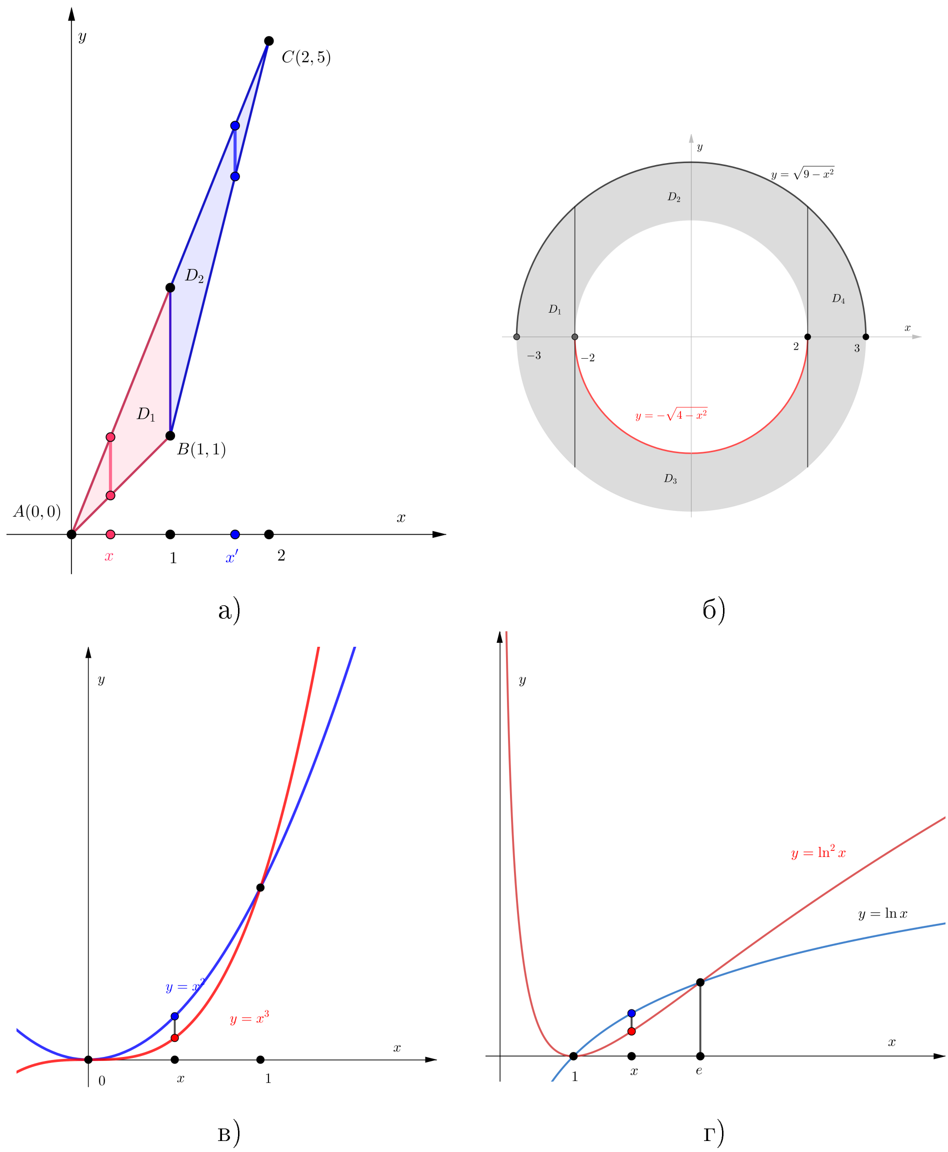
а) D е триаголникот со темиња во точките $A(0, 0), B(1, 1)$ и $C(2, 5)$;

б) $D = \{(x, y) \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$;

в) D е делот од рамнината ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = x^3$ во првиот квадрант (делот со конечна плоштина);

г) D е делот од рамнината ограничен со кривите $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ (делот со конечна плоштина).

Решение. а) Ги наоѓаме равенките на правите на кои лежат страните на триаголникот AB, AC и BC. За првите две ги имаме равенките $AB : y = x$ и $AC : y = 5/2x$. За пресметување на равенка на правата низ B и C може да се користи формулата за равенка на права низ две точки, а може да се користи и следната техника.



Слика 7.2: Областите од задачата 189.

Векторот $\overrightarrow{BC} = [\ 2-1 \quad 5-1\ ]^T = [\ 1 \quad 4\ ]^T$. Ако со $\{x, y\}$ го означиме радиус векторот на произволна точка од правата, тогаш:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \iff x = 1 + t,\ y = 1 + 4t, t \in \mathbb{R}. \tag{7.1.4}$$

Со изедначување на t од двете равенки добиваме:

$$x - 1 = \frac{y-1}{4} \iff y = 4x - 3. \tag{7.1.5}$$

Како што е дадено на сликата 7.2. а), за избор на $0 \leq x \leq 1$, точки од областа се сите точки (x, y) такви што y-координатата е ограничена со вредностите на две од правите кои претходно ги пресметавме, аналогно и за избор на $1 \leq x \leq 2$. Имено, за областа на интеграција важи: $D = D_1 \cup D_2$, каде што $D_1 = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \frac{5}{2}x\}$ и $D_2 = \{(x,y) \,|\, 1 \leq x \leq 2, \;\; 4x-3 \leq y \leq \frac{5}{2}x\}$. Оттаму,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{5/2x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{4x-3}^{5/2x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

б) Равенката на кружницата $x^2 + y^2 = R^2$ ја запишуваме во еквивалентниот облик $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, при што графикот на кружницата можеме да го гледаме како унија од графиците на следните две криви: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Првата од нив е горната полукружница (над x-оската), а втората е долната полукружница (под x-оската). Аналогно, графикот на кружницата може да се разгледува како унија од лева и десна полукружница (чии равенки се $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ и $x = -\sqrt{R^2 - y^2}$, соодветно). Во конкретниот случај, областа D е прстенот ограничен со двете кружници $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 9$ (види ја сликата 7.2. б)), односно ако интегрирањето е прво по променливата y, а потоа по x, тогаш од скицата $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ и за интегралот имаме:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-3}^{-2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$+ \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{2}^{3} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

в) Ги бараме пресечните точки на двете криви, односно:

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ y &= x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x^2 \\ x^2 &= x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x^2 \\ 0 &= x^2(x-1) \end{cases},$$

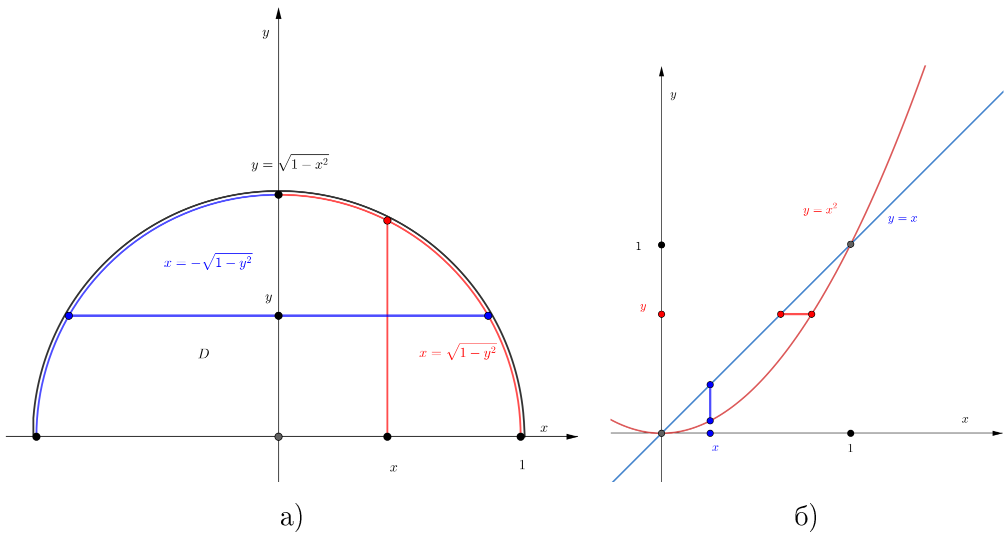
од каде што $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. Областа на интеграција D (делот ограничен со кривите со конечна плоштина) е множеството точки чија прва координата задоволува $0 \leq x \leq 1$. Во однос на втората, да забележиме дека за $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \geq x^3$. Значи, под претпоставка $0 \leq x \leq 1$, мора $x^3 \leq y \leq x^2$ (види ја сликата 7.2. в)). За интегралот, ако прво интегрираме по променлива y а потоа по променлива x, добиваме:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Ако интегрираме прво по променливата x, а потоа по променливата y, тогаш за интегралот го добиваме записот:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

г) Постапката е слична како под в). Треба да се најдат пресечните точки на кривите во задачата.



Слика 7.3: Областите на интеграција во задачите 190. и 191.

Во следните задачи изврши смена на редоследот на интеграција.

Задача 190. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

Решение. Од интегралот за област на интеграција го добиваме множеството:

$$D = \{(x,y)\,|\,-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\},$$

што е горен (над x-оска) полукруг со радиус 1. Овај запис на областа ги подразбира сите црвени отсечки (види ја сликата 7.3.) од точки со прва координата x, кога x се менува во интервалот $[-1,1]$. Задачата се состои во наоѓање запис на D од облик:

$$D = \{(x,y)\,|\,c \le y \le d,\ \psi_1(x) \le x \le \psi_2(x)\}. \tag{7.1.6}$$

Од цртежот е очигледно дека за која било точка (x,y) од областа D важи $0 \le y \le 1$. Фиксираме y од сегментот $0 \le y \le 1$ и ги разгледуваме точките од областа D со втора координата y. Од цртежот забележуваме дека тоа е сино обоената отсечка, односно добиваме дека: за фиксен $0 \leq y \leq 1$, x-координатата ќе се менува од левата полукружница (сино обоената) до десната полукружница (црвено обоената) или $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. Значи,

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Следствено, $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Задача 191. $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Решение. Областа на интеграција е множеството:

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}.$$

Целта е D да се запише од облик на равенката (7.1.6). Од познатиот запис на D добиваме дека тоа е делот од рамнината со конечна плоштина што е ограничен од кривите $y = x$ и $y = x^2$ (види ја сликата 7.3. б)). Забележуваме дека за y координатата на која било точка од областа важи $0 \leq y \leq 1$. Со други зборови, ортогоналната проекција на областа D врз y-оската е отсечката $0 \leq y \leq 1$. За фиксен y таков што $y \in [0,1]$ нѐ интересира црвено обоената отсечка на цртежот која има една крајна точка на правата $y = x$ (т.е. $x = y$), а друга на параболата $y = x^2$ (т.е. $x = \sqrt{y}$, бидејќи секако $x > 0$). Со менување на y добиваме:

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

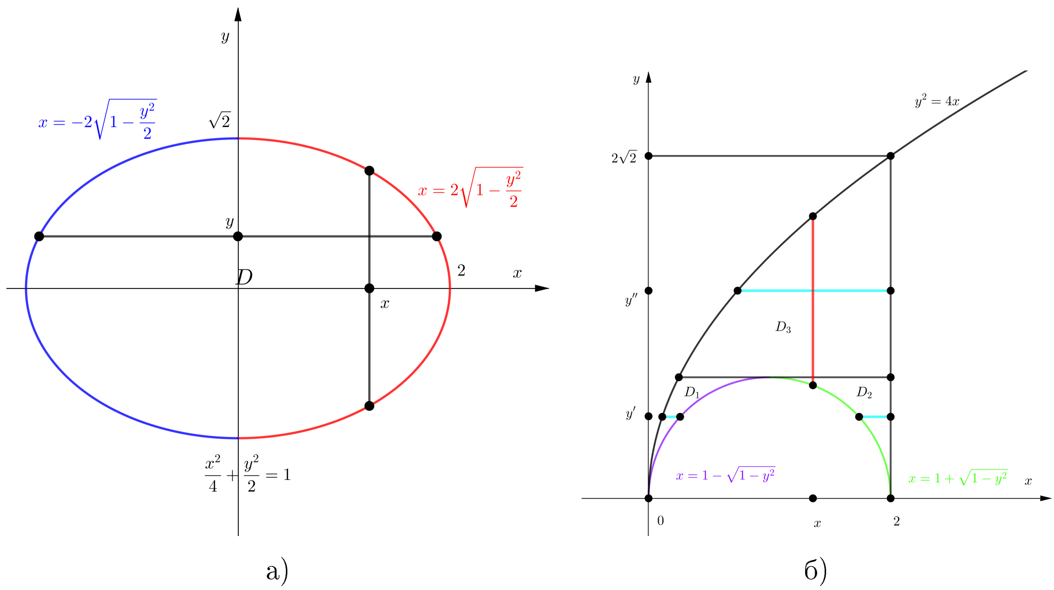
и за интегралот $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Задача 192. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Решение. Областа на интеграција е множеството:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)|\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1\} \\ &= \{(x,y)| -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}, -2\sqrt{1-\frac{y^2}{2}} \leq x \leq 2\sqrt{1-\frac{y^2}{2}}\}. \end{aligned}$$

Види ја сликата 7.4. а). Деталите ги оставаме на читателот.



Слика 7.4: Областите на задачите 192. и 193.

Задача 193. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

Решение. Областа на интеграција е множеството:

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ \sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{4x}\}.$$

Равенката $y=\sqrt{2x-x^2}$ е равенка на горната половина (над x-оска) од кружницата $(x-1)^2+y^2=4$, а равенката $y=2\sqrt{x}$ е равенка на горната половина од параболата $y^2=4x$. Повторно, целта е да се запише областа D од облик на равенката (7.1.6). Забележуваме дека за секоја од точките од областа, $0 \le y \le 2\sqrt{2}$. За избор $0 \le y' \le 1$ (како на сликата 7.4. б)), точки од областа се двете сини отсечки на цртежот. Едната отсечка има една крајна точка на параболата $y=2\sqrt{x}$ (т.е. $x=\dfrac{y^2}{4}$), а друга крајна точка од левата полукружница $x=1-\sqrt{1-y^2}$ (виолетово обоената). Другата отсечка има една крајна точка на десната полукружница $x=1+\sqrt{1-y^2}$ (зелено обоената), а друга крајна точка на правата $x=2$. Значи, со менување на y добиваме:

$$D_1 = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1,\ \frac{y^2}{4} \le x \le 1-\sqrt{1-y^2}\}$$
$$D_2 = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1,\ 1+\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\}.$$

За избор $1 \le y'' \le 2\sqrt{2}$ (види ја сликата 7.4. б)), точките од областа ја трасираат сината отсечка со една крајна точка на параболата $x = \dfrac{y^2}{4}$ и друга крајна точка на правата $x = 2$. Следствено

$$D_3 = \{(x,y) \,|\, 1 \le y \le 2\sqrt{2},\ \frac{y^2}{4} \le x \le 2\},$$

од каде што со менување на y имаме:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_1^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{4}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Задача 194. Изврши смена на редоследот на интеграција кај интегралите од задачата 189.

Решение. За читателот.

Во следните задачи пресметај ја вредноста на интегралот.

Задача 195. а) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; б) $\displaystyle\iint\limits_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
каде што $D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Решение. Областа на интеграција во а) и б) е квадрат. Оттаму добиваме:

а)

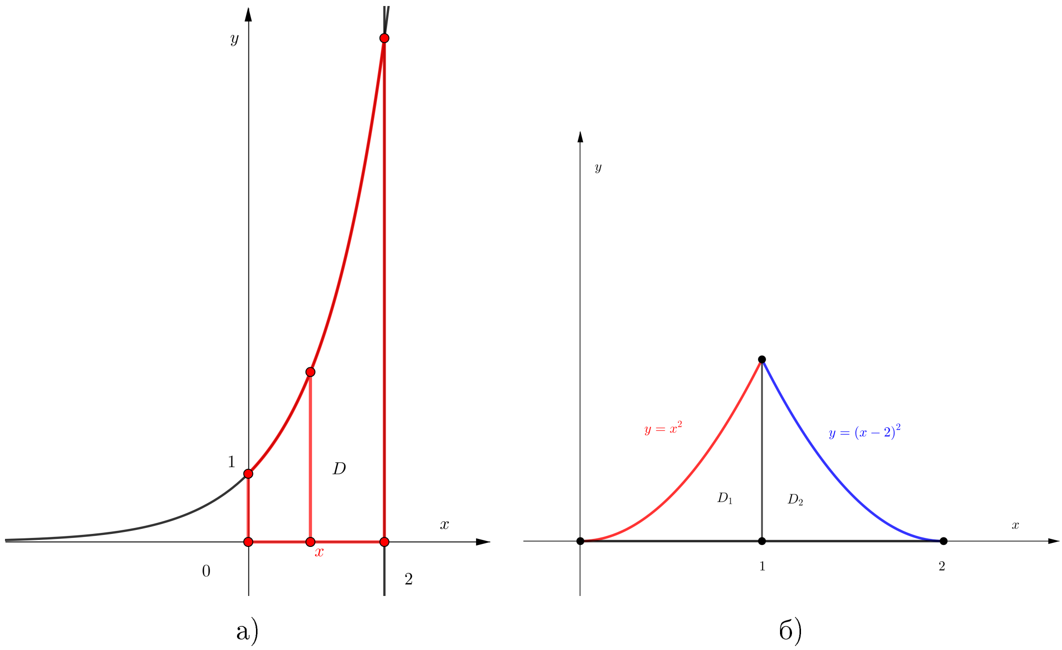
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 xy\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 y\mathrm{d}y = \int_0^1 x(\frac{y^2}{2})\,\Big|_0^1\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

б)

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 e^x\mathrm{d}x \int_0^1 e^y\mathrm{d}y = \int_0^1 e^x\big(e^y\big)\,\Big|_0^1\,\mathrm{d}x = (e-1)\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$
$$= (e-1)^2.$$

Задачата може да се реши со смена $t = x + y$ во првиот интеграл.

Задача 196. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2}{x+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што $D = \{(x,y) \,|\, 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$.



Слика 7.5: Областите на интеграција во задачите 197. и 198.

Решение. За читателот.

Задача 197. $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le e^x\}$.

Решение. $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{e^x} \mathrm{d}y = \int_0^2 y|_0^{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 e^x \mathrm{d}x = e^x|_0^2 = e^2 - 1.$

Задача 198. $\displaystyle\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што $D = \{(x,y)\,|\,\sqrt{y} \le x \le 2-\sqrt{y},\ 0 \le y \le 1\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{x^2} y\,\mathrm{d}y + \int_1^2 x\mathrm{d}x \int_0^{(x-2)^2} y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}|_0^{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 x\frac{y^2}{2}|_0^{(x-2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\frac{x^4}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 x\frac{(x-2)^2}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^6}{12}|_0^1 + \frac{x^4}{8}|_1^2 - \frac{2x^3}{3}|_1^2 + \frac{2x^2}{2}|_1^2 \\
&= \frac{1}{12} - 0 + 2 - \frac{1}{8} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} + 4 - 1 = \frac{7}{24}.
\end{aligned}$$

Види ја сликата 7.5. б).

Задача 199. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што $D = \{(x,y)\,|\,2 \le x \le 4\,,\ \ x \le y \le 2x\}$.

Решение. За читателот.

7.2 Смена на променливи

Решавањето на интегралот $I = \displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ понекогаш се поедноставува со смена на променливите, слично како кај определените (и неопределените) интеграли. **Општа смена на променливи.** Интегралот I може да се пресмета со премин во друг координатен систем, различен од xy-координатниот систем. Тоа е често неопходно заради сложеноста на областа D или на подинтегралната функција $f(x,y)$. Општата смена $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ го трансформира I во обликот:

$$I = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \ J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0,$$

каде што J е т.н. *Јакобијан* на трансформацијата. Во продолжение споменуваме две корисни смени.

Поларни координати. За парот (ρ,φ) велиме дека се *поларни координати* на точка (x,y) ако:

i) ρ е растојанието од координатниот почеток до точката (x,y),

ii) φ е аголот кој отсечката што го поврзува координатниот почеток со точката (x,y) го зафаќа со позитивната x-полуоска.

Од ова јасно е дека $\rho \ge 0$. Вообичаено се зема $0 \le \varphi < 2\pi$, или алтернативно $-\pi \le \varphi < \pi$. Напоменуваме дека се исполнети следните равенства:

$$x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi\,, x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ и } \arctan\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

При премин во поларни координати, за Јакобијанот важи: $J = \rho$.

Елиптични координати. Парот (ρ,φ) се вика *елиптични* координати на точката (x,y) ако:

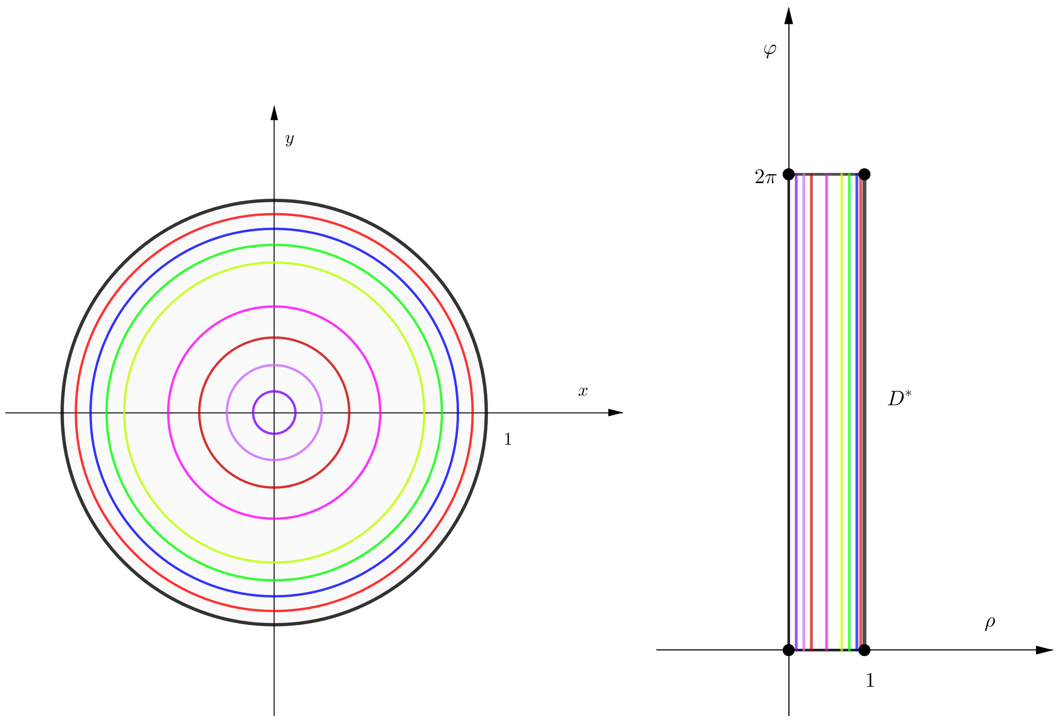
$$x = a\rho\cos\varphi,\ \ y = b\rho\sin\varphi\,,$$

каде што ρ,φ се дефинирани како претходно. За оваа смена важи: $J = ab\rho$.

Во следните неколку задачи воведи поларна смена на променливи во интегралот $I = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што областа D е зададена со:

Задача 200. $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$.

Решение. Областа D е прикажана на сликата 7.6. Со смената $x = \rho\cos\varphi,\ y =$



Слика 7.6: Областа D од задачата 200. (лево) и соодветната област D^* (десно).

$\rho\sin\varphi$, имаме трансформација $(x,y)\mapsto(\varphi,\rho)$. Имено, како што е прикажано на сликата, секоја од различните концентрични кружници (означена со различна боја) со поларната смена се пресликува во отсечка со соодветна боја од областа означена со D^*. Значи, $D^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Потсетуваме дека во последниот интеграл се појавува ρ бидејќи $J = \rho$.

Задача 201. $D = \{(x,y) \,|\, 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

Решение. Областа на интеграција е прстенот од задачата 189., прикажан на сликата . б). Со смената $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, остваруваме премин $(x,y) \mapsto (\varphi,\rho)$, при што слично како во задачата 200. заклучуваме дека областа D^* е правоаголна. Имено, $D^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 2 \le \rho \le 3\}$ (за фиксно φ точки од областа се сите точки од црвената отсечка на цртежот од задачата 200. кои се на растојание помеѓу 2 и 3. Значи,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^3 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Задача 202. $D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

Решение. Користи ја сликата од задачата 190.

Задача 203. а) $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le 2x\}$;

б) $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le 2y\}$.

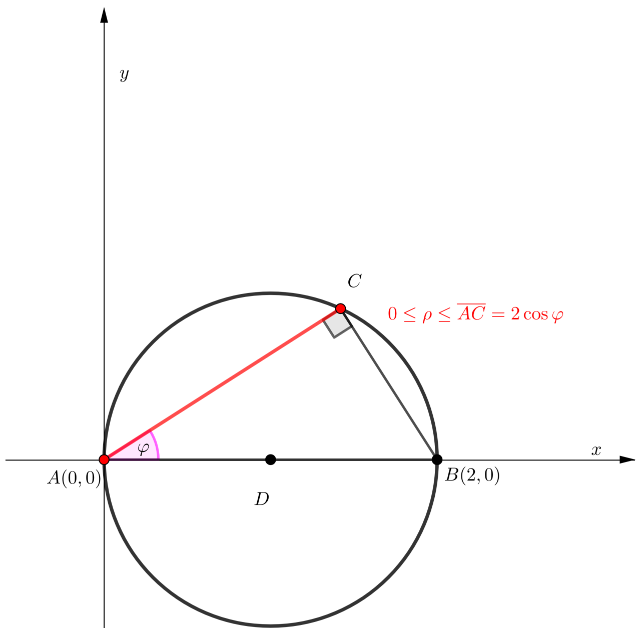
Решение. а) Формулата $x^2 + y^2 \le 2x$ ја запишуваме во облик $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ од каде што добиваме дека областа D е кругот со центар во точката $(1,0)$ и радиус 1. Фиксираме φ, така што $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Нè интересираат точките од областа D такви што лежат на права која зафаќа агол φ со позитивната x-полуоска. Тоа се точките од црвено обоената отсечка на цртежот. Со A го означуваме координатниот почеток, со C ја означуваме точката (различна од A) од таа права која лежи и на кружницата, а со B ја означуваме дијаметрално-спротивната точка на A (види ја сликата 7.7.). Триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во точката C бидејќи $\measuredangle ACB$ е периферен агол над централен агол од 180^0 (Талесова теорема). Од правоаголниот триаголник добиваме дека $\cos\varphi = \overline{AC}/\overline{AB}$ од каде што $\overline{AC} = 2\cos\varphi$. Точките од црвената отсечка на сликата се сите парови $(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ такви што φ е горе избраното и $0 \le \rho \le \overline{AC} = 2\cos\varphi$. Значи, $D^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi\}$. Следствено,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

б) Областа D е, всушност, $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Постапката е аналогна на а).
Ако во задачите 200., 201., 202., 203. областите на интеграција се определени со елипси, концентрични елипси, елипси што се допираат, тогаш се постапува аналогно. Единствената разлика е во користењето на елиптична смена на променливи.

Задача 204. D е пресекот на круговите: $x^2 + y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 2y$.

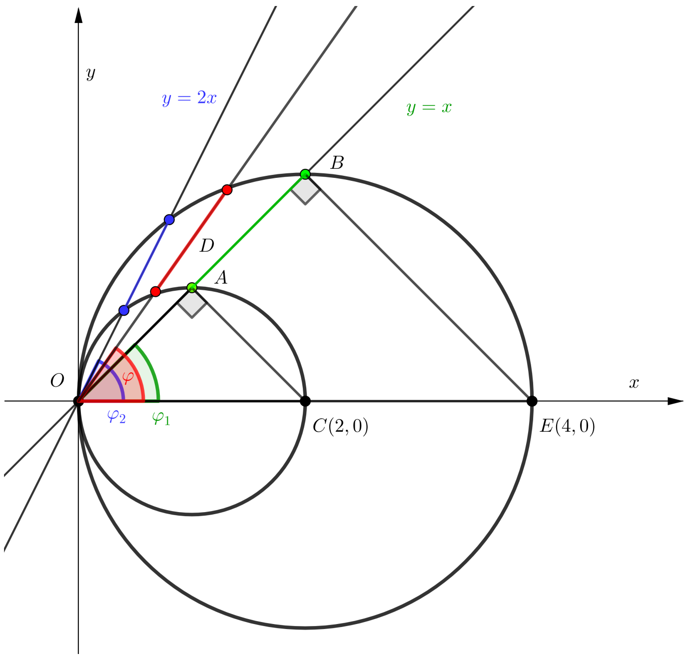
Решение.



Слика 7.7: Областа D од задачата 203.

Задача 205. D е областа ограничена со кривите: $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$, $y = x$ и $y = 2x$.

Решение. Областа на интеграција е дадена на сликата 7.8. Нека φ_1 е аголот што го зафаќа правата $y = x$ (зелено обоените) а φ_2 е аголот што го зафаќа правата $y = 2x$ со позитивната x-полуоска. Фиксираме φ т.ш. $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Како што е прикажано на сликата, нѐ интересираат точките од областа D кои лежат на правата која зафаќа агол φ со позитивната x-полуоска. Тој дел од правата е црвено обоената отсечка. Аналогно на задачата 203., ги разгледуваме правоаголните триаголници OCA и OEC. Од нив добиваме: $\overline{OA} = 2\cos\varphi_1$ и $\overline{OB} = 4\cos\varphi_1$. Со менување на φ долж сегментот $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ и $2\cos\varphi \leq \rho \leq 4\cos\varphi$ ги добиваме



Слика 7.8: Областа D од задачата 205.

сите точки од областа, односно: $D^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, 2\cos\varphi \leq \rho \leq 4\cos\varphi\}$. Преостанува да се пресметаат φ_1, φ_2. Знаеме дека $\varphi_1 = \arctan(1/1) = \dfrac{\pi}{4}$ (точка од правата е $(1,1)$) и $\varphi_2 = \arctan(2/1)$ (точка од правата е $(1,2)$). Конечно,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \mathrm{d}\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Да забележиме дека до истиот резултат можеме да дојдеме со користење на смената: $x - 1 = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогаш:

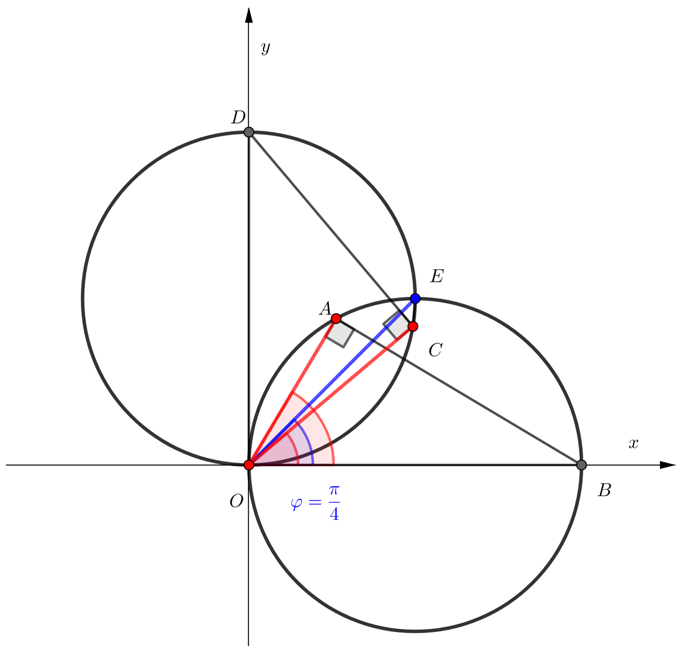
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 f(1+\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Задача 206. D е пресекот на круговите: $x^2 + y^2 \leq 2x$ и $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Решение.

Пресекот на граничните кружници $x^2 + y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 2y$ го добиваме од:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2x \\ x^2 + y^2 &= 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 &= 2x \\ x &= y \end{cases}.$$



Слика 7.9: Областа D од задачата 206.

Пресечните точки се $O(0,0)$ и $E(1,1)$. Областа на интеграција ја делиме на два дела со помош на сината отсечка (тоа се точките од областа D кои зафаќаат агол $\pi/4$ со позитивната x-полуоска). Според тоа сликите на тие две области при премин во поларни координати се:

$$D_1^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, 0 \leq \varphi \leq \pi/4,\ \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$$
$$D_2^* = \{(\varphi, \rho) \,|\, \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2,\ \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4\}.$$

Преостанува да се пресметаат ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ρ_4. Избираме $\varphi \in [0, \pi/4]$ и $\phi \in [\pi/4, \pi/2]$ и ги фиксираме. Со C и A, соодветно, ги означуваме пресечните точки на правите кои зафаќаат агли φ и ϕ со позитивната x-полуоска. Точките од областа D кои лежат и на двете повлечени прави се отсечките обоени црвено. Од произволноста на аглите φ, ϕ следува дека со нивно менување, во соодветните сегменти, множеството точки од црвените отсечки ја покриваат целата D.

Триаголниците OBA и OCD се правоаголни (Талесова теорема) со прави агли кај темињата C и A, соодветно (види ја сликата 7.9.). Следува дека $\overline{OA} = 2\cos\phi$ и $\overline{OC} = 2\sin\varphi$. Значи, за фиксни φ, ϕ од соодветните сегменти, важи $0 \leq \rho \leq 2\sin\phi$

и $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$. Конечно,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Во наредните задачи пресметај ја вредноста на двојните интеграли.

Задача 207. $I = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (Спореди со задачата 218.)

Решение. Областа на интеграција D ја сочинуваат сите точки (x,y), такви што $-1 \le x \le 1$ и $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Значи, D е полукругот над x-полуоската (види ги задачите 200 и 202). Од врската за поларна смена $x^2+y^2=\rho^2$, за $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ добиваме:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\begin{bmatrix} t & = 1-\rho^2 \\ \mathrm{d}t & = -2\rho\mathrm{d}\rho \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^0 \sqrt{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^0$$

$$= -\frac{1}{3}(\pi-0)(0-1) = \frac{\pi}{3}.$$

Задача 208. $I = \iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е кругот $x^2+y^2 \le 4$.

Решение. Воведи поларна смена.

Задача 209. $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Решение. Областа на интеграција D е круг со радиус 1 кој се наѓа во првиот квадрант. (Види ја сликата на задачата 200.) Користиме дека $x^2+y^2=\rho^2$ и за функцијата $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ од истата задача добиваме:

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$\begin{bmatrix} t & = 1+\rho^2 \\ dt & = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi/2} (t\ln t - t)\Big|_1^2$$

$$= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1).$$

Задача 210. $I = \iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е прстенот $4 \le x^2+y^2 \le 9$. (Види ја задачата 220.)

Решение. Областа на интеграција е дадена во задачата 189. под б). Користејќи ја задачата 201., за функцијата $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ добиваме:

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_2^3 \rho\sqrt{9-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\left[\begin{array}{ll} t & = 9-\rho^2 \\ \mathrm{d}t & = -2\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_5^0 \sqrt{t}\mathrm{d}\rho = -\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\ \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_5^0$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{5^3}}{3}.$$

Задача 211. $I = \int_{-2}^{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (Види ја задачата 217.)

Решение. Областа на интеграција е дадена во задачата 192. Воведуваме елиптични координати $x = 2\rho\cos\varphi$ $y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi$. Така,

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2\sqrt{2}\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho = 2\sqrt{2}I^* = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\,,$$

каде што I^* е вредноста на интегралот од задачата 207.

Задача 212. $I = \iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е кругот $x^2+y^2 \le 2x$. (Види ја задачата 203.)

Решение. Според задачата 203. имаме:

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} \rho\sqrt{4-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\left[\begin{array}{ll} t & = 4-\rho^2 \\ \mathrm{d}t & = -2\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_4^{4-4\cos^2\varphi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^{3/2}\Big|_4^{4\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{4\sin^2\varphi}\right)^3 - 2^3\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(|\sin\varphi|^3 - 1)\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin\varphi|^3 \mathrm{d}\varphi + \frac{8}{3}\pi.$$

Бидејќи функцијата $|\sin\varphi|$ е парна,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin\varphi|^3 \mathrm{d}\varphi = 2\int_{0}^{\pi/2} |\sin\varphi|^3 \mathrm{d}\varphi = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Остатокот од решението на задачата е оставен за самостојна работа.

Задача 213. $I = \iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е областа ограничена со кружниците $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ и правите $y=\sqrt{3}x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Решение. За читателот.

Задача 214. $I = \iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е областа ограничена со кружниците $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ и правите $y=\sqrt{3}x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Решение. За читателот.

Задача 215. $I = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, каде што D е делот од единечниот круг што се наоѓа во првиот квадрант.

Решение. Областа на интеграција D е истата како во задачата 209. и на сосема ист начин добиваме:

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \varphi\Big|_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\left[\begin{array}{cl} t & = \rho^2 \\ dt & = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right] = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t. \tag{7.2.1}$$

Во последниот интеграл воведуваме смена:

$$u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \tag{7.2.2}$$

од каде што $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{(-2)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Од смената (7.2.2) имаме $u^2 = \frac{1-t}{1+t} = \frac{-1-t}{1+t} + \frac{2}{1+t}$. Заменуваме во изразот за $\mathrm{d}u$ и добиваме:

$$\mathrm{d}u = \frac{-1}{u}(u^2+1)^2\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}t = \frac{-u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u. \tag{7.2.3}$$

Последното равенство го заменуваме во (7.2.1) и заклучуваме дека:

$$I = -\frac{\pi}{4}\int_1^0 \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u.$$

Добиениот интеграл се решава со парцијална интеграција (смена $u_1 = u$ и $\mathrm{d}v_1 = \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}$). Остатокот од решението на задачата е оставен за самостојна работа.

7.3 Примена на двојни интеграли

Нека $z = f(x,y)$ и $z = g(x,y)$ се две површини во просторот $\mathbb{R}^3$ (види ја сликата 7.10.). Со помош на двојни интеграли се пресметуваат некои волумени и плоштини на форми ограничени со овие две површини.

1) **Пресметување волумен на цилиндрично тело.** Волуменот на цилиндричното тело на сликата 7.11., кое од горе е ограничено со $z = f(x,y)$, од долу со $z = g(x,y)$, а странично со цилиндар чија ортогонална проекција е работ на областа D, се пресметува со формулата:

$$V = \iint\limits_D \left(f(x,y) - g(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.1}$$

Притоа, D е областа што се добива како проекција на телото дадено на сликата 7.11. врз xoy-рамнината.

- За избор на $g(x,y) = 0$ со формулата (7.3.1) се пресметува волуменот на телото дадено на сликата 7.12.

2) **Пресметување на плоштина на рамнински лик.** За избор $g(x,y)=0$ и $f(x,y)=1$ со формулата (7.3.1) се пресметува волуменот на цилиндрично тело кое има висина 1 од каде што се добива дека бројната вредност на волуменот на цилиндарот е еднаков на бројната вредност на плоштината на основата на цилиндарот. Следствено,

$$P(D)=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.2}$$

3) **Пресметување на плоштина на површина.** Плоштината на површината $z=f(x,y)$ дадена на сликата 7.12. се пресметува со формулата:

$$P=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.3}$$

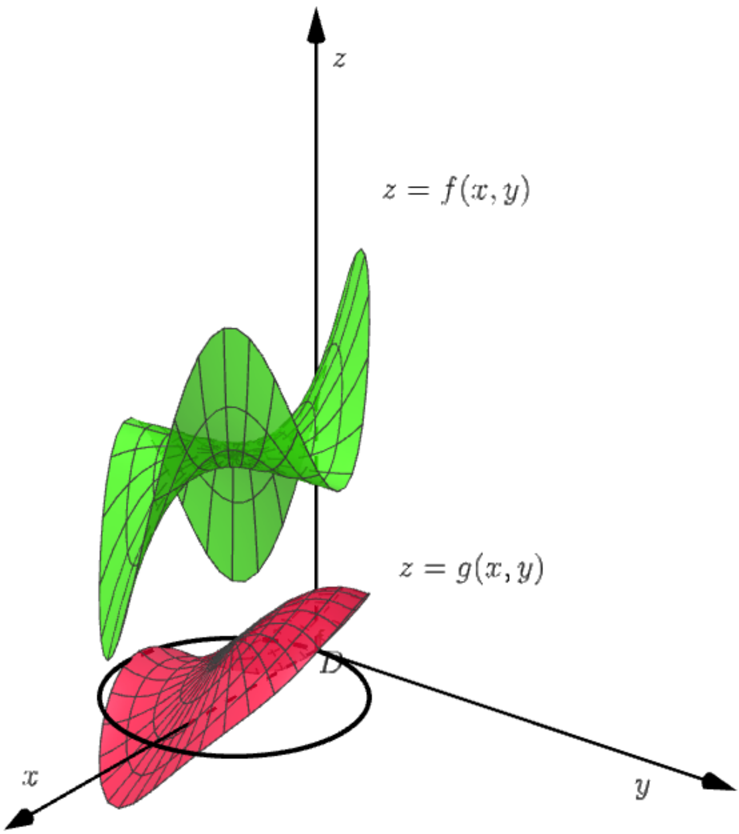
Во пресметките на волумен и плоштина како област на интеграција се јавува проекцијата на површината $z=f(x,y)$ врз xoy-рамнината. Проекцијата може да се изведе по која било координатна рамнина при што површината мора да се адаптира како функција по променливите соодветни на рамнината врз која се проектира. Формулата, исто така, мора да се адаптира, имено областа на интеграција треба да биде D_{xoy} или D_{yoz} и интегрирањето да биде по променливите x,z, односно по y,z, соодветно. Резултатот е идентичен.

Задача 216. Даден е елипсоидот $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$. Пресметај ги плоштините на елипсите што се добиват во пресек со координатните рамнини.

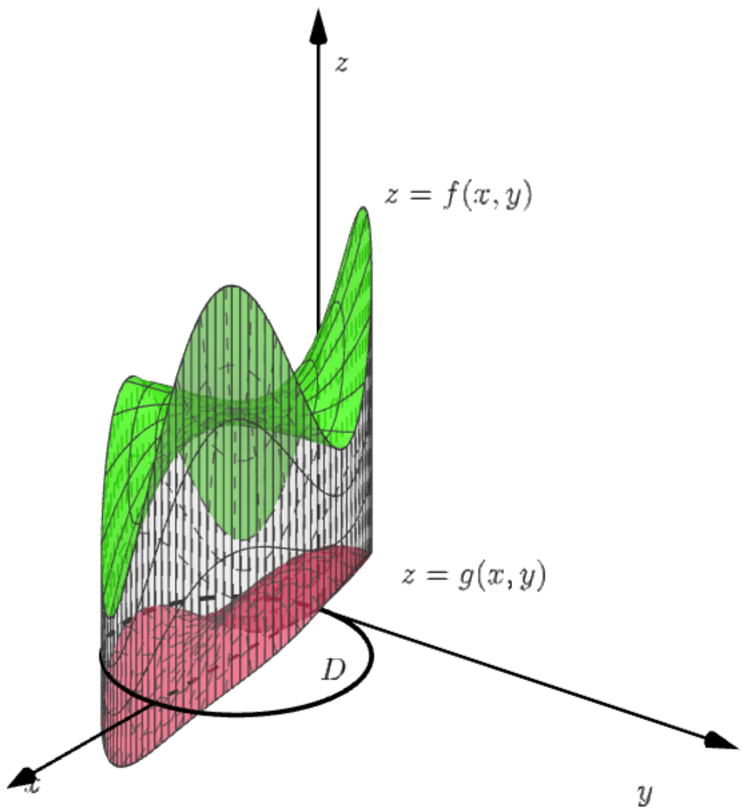
Решение. Координатните рамнини имаат равенки $z=0$, $y=0$ и $x=0$, соодветно. Кога $z=0$ (xoy-рамнината), областа на интеграција е дадена во задачата 192.

$$P(D_{xoy})=\iint\limits_{D_{xoy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ P(D_{xoz})=\iint\limits_{D_{xoz}} \mathrm{d}x\mathrm{d}z,\ P(D_{yoz})=\iint\limits_{D_{yoz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

каде што D_{xoy}, D_{xoz} и D_{yoz} се проекциите на елипсоидот врз рамнините $z=0$, $y=0$ и $x=0$. Конкретно, D_{xoy} е областа $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}\leq 1$ ($z=0$ во равенката на елипсоидот), D_{xoz} е областа $\dfrac{x^2}{4}+z^2\leq 1$ ($y=0$ во равенката на елипсоидот) и D_{yoz} е областа $\dfrac{y^2}{2}+z^2\leq 1$ ($x=0$ во равенката на елипсоидот). Да ја пресметаме $P(D_{yoz})$,



Слика 7.10: $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$.



Слика 7.11: Цилиндрично тело определено со $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$.

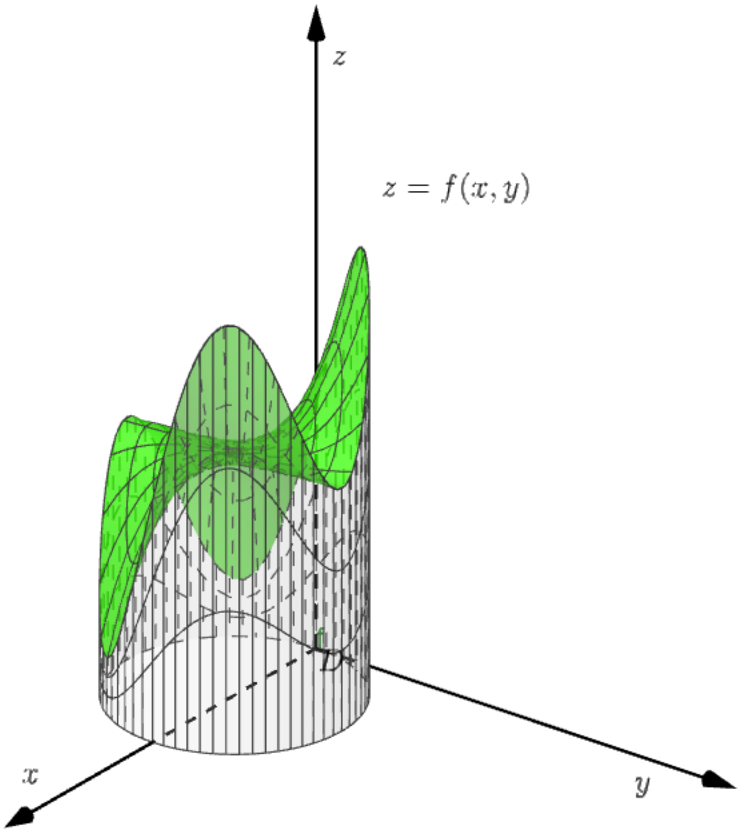
со напомена дека останатите плоштини се пресметуваат аналогно. Воведуваме елиптични координати $y = \sqrt{2}\rho\cos\varphi$ и $z = \rho\sin\varphi$. Добиваме:

$$P(D_{yoz}) = \iint\limits_{D_{yoz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho = \sqrt{2}\pi.$$

.

Задача 217. Пресметај го волуменот на елипсоидот: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

Решение. Равенката на елипсоидот ја запишуваме во еквивалентен облик: $z = \pm\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2}}$. Површината $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2}}$ е делот од елипсоидот којшто



Слика 7.12: Цилиндрично тело определено со: $z = f(x, y)$ и $z = 0$.

се наоѓа над xoy-рамнината, додека $z = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}}$ е делот од елипсоидот којшто се наоѓа под xoy-рамнината. Добиваме дека $V = 2I$, каде што I е вредноста на интегралот од задачата 211.

Задача 218. а) Пресметај го волуменот на топката:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 4.$$

б) Пресметај ја плоштината на кругот: $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$.

Решение. Забележуваме дека топката има центар во точка $(1, 2, 3)$ и радиус 2. Волуменот што го има поместена топка (која било) со еднаков радиус е еднаков на централната топка со радиус 2. Значи, заради едноставност, го бараме волуменот на топката $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ преку волуменот што површината $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ го зафаќа со xoy-рамнината (волуменот полутопката што лежи над xoy-рамнината). Значи, ако V е волуменот што се бара, тогаш:

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \mathrm{d}y \\ &= 2 \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Во последното равенство е искористено дека функцијата $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ е парна функција по променливата y од каде што:

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \mathrm{d}y = 2 \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \mathrm{d}y$$

(сферата е симетрична во однос на xoz-рамнината). Аналогно на задачата 207. добиваме дека интегралот во равенка (7.3.4) изнесува $8\pi/3$, од каде што $V = 32\pi/3$.

Алтернативно решение. Воведуваме поларна смена $x = 1 + \rho \cos \varphi$ и $y = 2 + \rho \sin \varphi$ за функцијата $z = 3 + \sqrt{4 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2}$, $J = \rho$.

Задача 219. а) Пресметај го волуменот на тетраедарот што го заградува рамнинината $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ со координатните рамнини.

б) Делот од рамнината во првиот октант го проектираме врз секоја од координатните рамнини. Пресметај ја плоштината на секоја од проекциите.

Решение. Равенката на рамнината се запишува во сегментен вид, од каде што се добиваат должините на отсечките кои рамнината ги отсекува долж координатните оски. Остатокот од задачата е тривијален. Задачата под а) може да се реши и со двоен интеграл од $z = 3 - x/6 - y/4$ на област $D : x = 0, y = 0, 2x + 3y = 12$. За б) избираме $z = 1$ и нека областа D е проекцијата врз соодветната координатна рамнина.

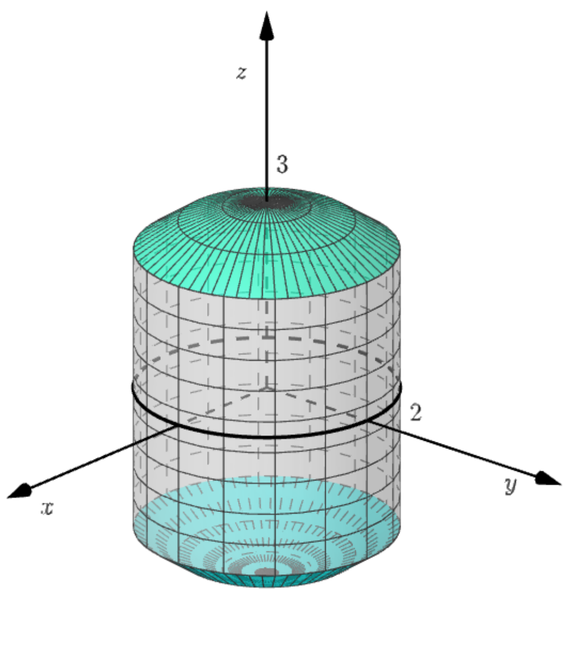
Во следните задачи пресметај го волуменот на даденото тело.

Задача 220. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ и $x^2 + y^2 \leq 4$.

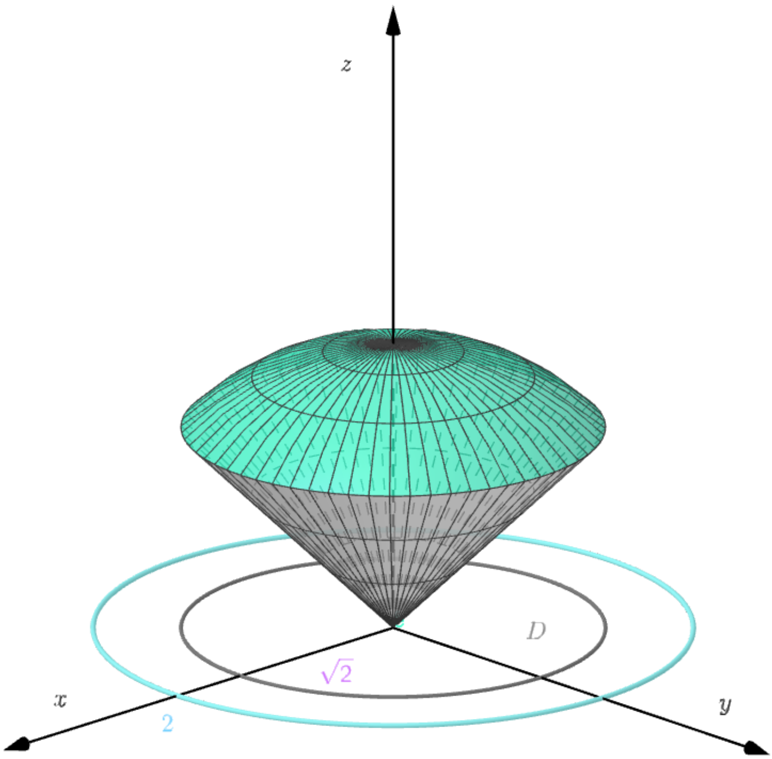
Решение. Сферата и цилиндарот отсекуваат две тела со конечен волумен. Едното тело е дадено на сликата 7.13., а другото тело е делот од топката што останува откако ќе се одземе првото тело. Нека $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ и користиме ознаки V_1 и V_2 за волумените на првото и второто тело. Тогаш $V_1 = 2I$, каде што I е вредноста на интегралот од задачата 210. (множењето со 2 е заради симетричноста на телото во однос на xoy-рамнината); V_2 се добива аналогно. Имено,

$$V_2 = 2\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 \sqrt{9-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho.$$

Друга опција е да се користи дека $V_1 + V_2 = \dfrac{4\cdot 3^3\pi}{3}$, односно $V_1 = 36\pi - V_2$. Значи, $V_2 = \dfrac{4\pi\sqrt{5^3}}{3}$ и $V_1 = 36\pi - \dfrac{4\pi\sqrt{5^3}}{3}$.



Слика 7.13: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $x^2 + y^2 \leq 4$



Слика 7.14: $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$

Задача 221. $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ и $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Решение. Бараме пресек на површините кои го дефинираат телото, односно:

$$\begin{cases} z &= \sqrt{x^2+y^2} \\ 4 &= x^2+y^2+z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= \sqrt{x^2+y^2} \\ 2 &= z^2 \end{cases},$$

од каде што добиваме дека површините се сечат во кружница $x^2+y^2=2$ за $z=\sqrt{2}$. Тоа тело е прикажано на сликата 7.14. Неговиот волумен изнесува:

$$V_1 = \iint\limits_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-\rho^2}-\rho)\rho \mathrm{d}\rho.$$

Конечно, $V_1 = \dfrac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$.

Задача 222. $z \le \sqrt{x^2+y^2}$ и $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Решение. Разликата помеѓу оваа задача и претходната е во тоа што овде телото е дефинирано со надворешноста на конус и внатрешноста на сфера. За да се пресмета неговиот волумен, наједноставно е од волуменот на топката да се одземе волуменот на телото од претходната задача, т.е.

$$V = \frac{4}{3}2^3\pi - \frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

Задача 223. $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ и $(x-1)^2+y^2 \leq 1$.

Решение. Избираме $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ (види ја сликата 7.15.). Решението се сведува на задачата 212.

Задача 224. $x^2+y^2 \leq 4$ и $x^2+z^2 \leq 4$.

Решение. Од сликата 7.16. очигледно е дека телото има различни проекции врз рамнините xoy, xoz (кругови) и yoz (квадрат). Проектираме врз xoy-рамнината. Тогаш,

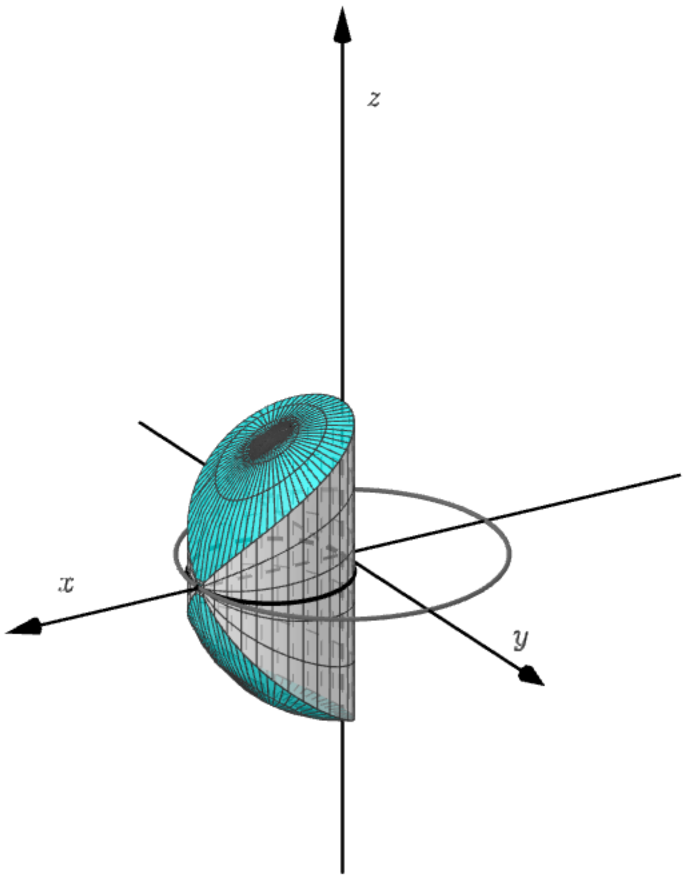
$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_D \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Во следните задачи пресметуваме плоштини.

Задача 225. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $2x+3y+4z-12=0$ кој се наоѓа во првиот октант.

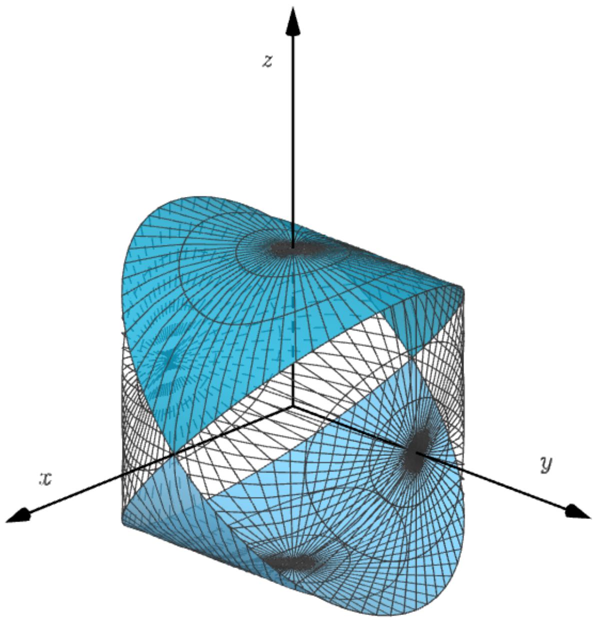
Решение. Во задачата се бара плоштината на триаголникот кој е отсечен од рамнината со координатните рамнини. Значи, проекцијата врз xoy-рамнината е триаголникот ограничен со правите $x=0, y=0$ и $y=-\frac{2}{3}x+12$ ($z=0$ во равенката на рамнината). Од $z=3-\frac{2}{12}x-\frac{3}{12}y$ добиваме: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{6}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{4}$. Значи,

$$\begin{aligned} P &= \int_0^6\int_0^{-\frac{2}{3}x+12}\sqrt{1-\frac{1}{36}-\frac{1}{16}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{131}{12}\int_0^6\int_0^{-\frac{2}{3}x+12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{131}{12}\int_0^6(-\frac{2}{3}x+12)\mathrm{d}x = 655. \end{aligned}$$



Слика 7.15: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Задача 226. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $2x+3y+4z-12=0$ кој се наоѓа во цилиндарот $x^2+y^2=1$.



Слика 7.16: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + z^2 \leq 4$.

Решение. Областа на интеграција е централен единечен круг. Од $z = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y$, па со смена во поларни координати: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$.

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \frac{\sqrt{29}}{4}\pi.$$

Задача 227. Пресметај ја плоштината на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ кој се наоѓа во цилиндарот $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Се бара плоштината на сино обоената површина од сликата 7.13. Постојат два дела од сферата пресечени со цилиндарот: еден за $z > 0$ и друг за $z < 0$. Заради постоечката симетрија важи $P = 2P_1$, каде што P_1 е плоштината на површината која се добива за $z > 0$. Тогаш, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

За плоштината имаме:

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint\limits_D \sqrt{\frac{1}{9 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

каде што $D : x^2 + y^2 \leq 4$. По смената во поларни координати се добива: $P = 6\pi(3 - \sqrt{5})$.

Задача 228. Пресметај ја плоштината на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ кој се наоѓа во цилиндарот $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Оваа задача е за самостојна работа. Резултатот е: $P = 16(\frac{\pi}{2} - 1)$.

Задача 229. Нека $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + z^2 = 4$. Пресметај ја плоштината на делот од првиот цилиндар што се наоѓа во вториот цилиндар, и обратно, плоштината на делот од вториот цилиндар што се наоѓа во првиот цилиндар.

Решение. Плоштината на делот од првиот цилиндар во внатрешноста на вториот е еднаква со плоштината на делот од вториот цилиндар што се наоѓа во внатрешноста на првиот. Значи, плоштините на виолетово обоениот дел и зелено обоениот дел од телото се еднакви (види ја сликата 7.16). Ќе ја пресметаме плоштината на виолетовиот дел. Повторно, заради симетричноста на сферата во однос на xoy-рамнината, имаме за $z = \sqrt{4 - x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Тогаш,

$$P = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_D \sqrt{\frac{1}{4 - x^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

каде што $D : x^2 + y^2 \leq 4$ По смената во поларни координати добиваме: $P = 32$.

7.4 Дополнителни задачи

Задача 230. Да се определат границите на интеграција на интегралот:

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

каде што D е триаголник ограничен со правите $y = 2x$, $y = -x + 4$ и $y = x + 1$.

Задача 231. Даден е двојниот интеграл:

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

Скицирај ја областа на интеграција и изврши промена на редоследот на интеграција.

Задача 232. Даден е двојниот интеграл:

$$\int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{5}}^{3} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Скицирај ја областа на интеграција, изврши промена на редоследот на интеграција и воведи поларна смена.

Задача 233. Да се пресмета следниот двоен интеграл:

а) $\displaystyle\int\limits_a^{\max\{a,b\}} \mathrm{d}x \int\limits_{\min\{a,b\}}^{b} \frac{\mathrm{d}y}{x+y}, a>0, b>0;$

б) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ каде што областа D е триаголникот OAB со темиња во точките $O(0,0)$, $A(1,2)$ и $B(2,3)$;

в) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ каде што $D: x^2+y^2 \leq R^2$, $xy>0$.

Задача 234. Скицирај ја областа на интеграција на интегралот:

$$\int_{-6}^{0} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{-x^2-6x}}^{\sqrt{36-x^2}} xy\mathrm{d}y.$$

Изврши промена на редоследот на интеграција, а потоа воведи поларна смена.

Задача 235. Изврши промена на редоследот на интеграција кај интегралот:

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}y \int_{\tan y}^{\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi-y}} \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

а потоа пресметај ја неговата вредност.

Задача 236. Да се пресмета $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, каде што D е областа:

а) $x^2+y^2 \leq 4;$

б) $x^2+y^2 \leq 4y;$

в) $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq x$ и $y < 2x$.

Задача 237. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик определен со неравенствата: $x^2+y^2-8y \leq 0$ и $x^2+y^2 \leq 48$.

Задача 238. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик определен со неравенствата: $(x-\frac{\sqrt{3}}{3})^2+y^2 \leq \frac{1}{3}$ и $x^2+y^2 \leq 1$.

Задача 239. Да се пресмета двојниот интеграл: $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y}$ каде што D е областа во првиот квадрант ограничена со: $x^2+y^2=1$.

Задача 240. Дефинираме две тела T_1 и T_2 со: $T_1 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \leq 4 \\ y^2+z^2 & \leq 3 \end{cases}$ и $T_2 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \leq 4 \\ y^2+z^2 & > 3 \end{cases}$. Пресметај ја вредноста на: V_1, V_2, V_1+V_2 и V_1/V_2, каде што со $V_i, i=1,2$, е означена вредноста на волуменот на телото $T_i, i=1,2$, соодветно.

Задача 241. Ја користиме нотацијата од претходната задача. Пресметај ја вредноста на: P_1, P_2, P_1+P_2 и P_1/P_2, каде што со $P_i, i=1,2$, е означена вредноста на плоштината на телото $T_i, i=1,2$, соодветно.

Задача 242. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините:

а) $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4y$, $z=0$ и $z=1$;

б) $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4y$, $z=0$ и $z=x+y$;

в) $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4y$, $z=x^2+\sqrt[3]{y}$ и $z=9+x^2+\sqrt[3]{y}$.

Задача 243. Да се пресметаат плоштината и волуменот на телото добиено како пресек на: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3} \leq 1$ и $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.

Задача 244. Да се пресмета волуменот и плоштината на телото:

а) $z \geq 2x^2+2y^2$, $z \leq x^2+y^2+4$;

б) $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $z \leq -\sqrt{x^2+y^2}+4$.

Задача 245. Да се пресмета во каков однос рамнината $x+2y+3z=0$ го дели волуменот на $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$.

Задача 246. Да се пресмета во каков однос рамнината $x+2y+3z=0$ ја дели плоштината $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Библиографија

[1] B. Apsen, Repetitorij više matematike 3, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.

[2] B. Apsen, Rešeni zadači više matematike 3, Tehnička knjiga, Zagreb 1966.

[3] Г. Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, Наука, Москва 1969.

[4] С. Геговска-Зајкова, К. Хаџи-Велкова Санева, Елементи од векторска алгебра и аналитичка геометрија во простор, УКИМ, Скопје 2011.

[5] B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb 1986.

[6] Б. Јолевска-Тунеска, С. Геговска-Зајкова, Е. Хаџиева, К. Санева, Катерина, Б. Начевска-Настовска, Збирка решени испитни задачи од Математика 2, Електротехнички факултет, Скопје 2004.

[7] M. H. Potter, C. B. Morray, Intermediate Calculus, Springer Verlag, New York 1985.

[8] К. Тренчевски, Б. Крстевска, Аналитичка геометрија, УКИМ, Скопје 2018.

[9] К. Тренчевски, Б. Крстевска, Линеарна алгебра, УКИМ, Скопје 2019.

[10] Б. Трпеновски, Н. Целакоски, Ѓ. Чупона, Виша математика 3, Функции од повеќе променливи, Просветно дело, Скопје 1994.

[11] Б. Трпеновски, Н. Целакоски, Ѓ. Чупона, Виша математика 4, Одбрани делови, Просветно дело, Скопје 1994.

[12] З. Мисајлески, Векторска и линеарна алгебра, УКИМ, Скопје 2018.

[13] J. Povh, S. Pustavrh, M. Fošner, M. Gorše Pilher, B. Zalar, Matematične metode v uporabi, DMFA, Ljubljana 2010.

[14] A. Самарџиски, Векторска алгебра низ задачи, УКИМ, Скопје 1992.

[15] J. Улчар, Аналитичка геометрија со векторска алгебра, PE Нумерус, Скопје 1995.

[16] M.P. Ušćumlić, P.N. Milićić, Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd 1984.

[17] M.P. Ušćumlić, P.N. Milićić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd 1984.

[18] B. Hvala, Zbirka izpitnih nalog iz analize, DMFA, Ljubljana 2016.