

1. Електростатика

$$F = \pm k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \text{ [N]} - \text{Кулонов закон}$$

$$\vec{F} = \pm k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{r}_0 - \text{векторски облик на Кулоновиот закон}$$

F [N] – електростатска (Кулонова) сила

Q_1 и Q_2 [C] – количества електрицитет

r [m] – растојание меѓу наелектризираните тела

k – константа на пропорционалност

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] = \left[\frac{As}{Vm} = \frac{F}{m} \right]$$

ϵ_0 – апсолутна диелектрична константа (диелектрична константа на вакуум)

ϵ_r – релетивна диелектрична константа

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right] - \text{за вакуум}$$

$$E = \frac{F}{Q} \left[\frac{N}{C} \right] = \frac{U}{r} \left[\frac{V}{m} \right] = k \frac{Q}{r^2} \left[\frac{V}{m} \right]$$

$E \left[\frac{V}{m} \right]$ – јачина на електричното поле

U [V] – напон

$$V_a = E \cdot r = \frac{A}{r} = k \frac{Q}{r} [V]$$

U [V] = $V_a - V_b$ – напон (потенцијална разлика)

W [Ws] = $E \cdot Q \cdot r = Q \cdot U$ – работа

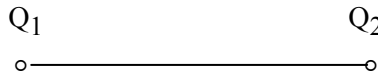
За повеќе електрични полнежи потенцијалот е:

$$V = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

V [V] – потенцијал во дадената точка на резултантното електрично поле
 r_i [m] – растојание од поединечните електрични полнежи Q_i до дадената точка на резултантното електрично поле.

1. Два електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1 = Q_2 = 3.2 \cdot 10^{-19}$ C се наоѓаат во вакуум на растојание од $5 \cdot 10^{-12}$ cm. Да се определи интензитетот и силата која дејствува меѓу нив.

решение:

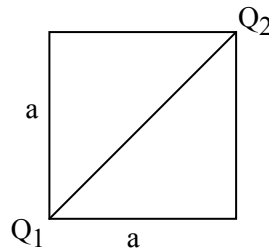


$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(3.2 \cdot 10^{-19})^2}{[(5 \cdot 10^{-12}) \cdot 10^{-2}]^2} = 3.686 \cdot 10^{-1} [\text{N}]$$

Силата која дејствува меѓу наелектризираните тела е со позитивен предзнак и е одбивна.

2. Два електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ C и $Q_2 = -6 \cdot 10^{-9}$ C се наоѓаат во воздух и поставени се во два спротивни темиња на квадрат со страна 3 cm. Да се определи интензитетот и насоката на силата со која овие две тела дејствуваат едно на друго.

решение:



$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 3 \cdot 10^{-2} \sqrt{2} [\text{m}]$$

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-8} (-6 \cdot 10^{-9})}{(3 \cdot 10^{-2} \sqrt{2})^2} = -9 \cdot 10^{-4} [\text{N}]$$

Интензитетот на силата која дејствува меѓу наелектризираните тела е $|F| = 9 \cdot 10^{-4} [\text{N}]$, и таа е привлечна.

3. Колкаво е меѓусебното растојание на две наелектризирани тела со количества електрицитет $2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ и $4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, ако се наоѓаат во масло со релативна диелектрична константа $\epsilon_r = 2,5$ и ако меѓу нив дејствува сила од $0,9 \text{ N}$.

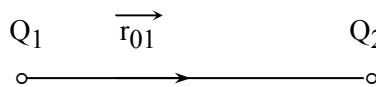
решение:

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$r = \sqrt{k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 0,9}} = 0,178 \text{ m}$$

4. Два електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ и $Q_2 = 6 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ се наоѓаат во вакуум на меѓусебно растојание од $0,2 \text{ m}$. Да се определи векторот на кулоновата сила со која телото со количество електрицитет Q_1 делува на телото со количество електрицитет Q_2 .

решение:



$$\vec{F}_1 = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{r}_{01} = F_1 \cdot \vec{r}_{01} \quad k = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right]$$

\vec{r}_{01} – единечен вектор на меѓусебното растојание на двете тела и неговата насока е секогаш од наелектризираното тело кон набљудуваната точка во полето.

F_1 -алгебарска вредност на силата

$$\vec{F}_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-11} \cdot (-6 \cdot 10^{-11})}{0,2^2} \cdot \vec{r}_{01} = -54 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \vec{r}_{01}$$

$$|\vec{F}_1| = 54 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

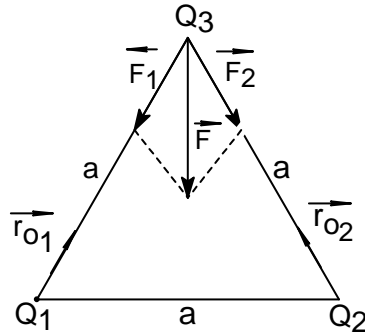
Векторот на кулоновата сила има спротивна насока од единечниот вектор, односно силата која делува меѓу наелектризираните тела е привлечна.

5. Електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1=Q_2=10^{-10}$ C и $Q_3=-10^{-10}$ C се наоѓаат во воздух во темињата на рамностран триаголник со должина на страна 1 cm. Да се определи векторот на кулоновата сила на полнежот со количество електрицитет Q_3 .

решение:

$$\vec{F}_1 = k \frac{Q_1 \cdot Q_3}{a^2} \vec{r}_{01} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-10} \cdot (-10^{-10})}{(1 \cdot 10^{-2})^2} = -9 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \vec{r}_{01}$$

$$\vec{F}_2 = k \frac{Q_2 \cdot Q_3}{a^2} \vec{r}_{02} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-10} \cdot (-10^{-10})}{(1 \cdot 10^{-2})^2} = -9 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \vec{r}_{02}$$



Векторот на кулоновата сила на телото со количество електрицитет Q_3

е: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, а алгебарската вредност на резултантниот вектор изнесу-

ва: $F = \sqrt{F_1^2 + 2 \cdot F_1 F_2 \cos(\angle F_1 F_2) + F_2^2}$

$$F = \sqrt{(9 \cdot 10^{-7})^2 + 2 \cdot (9 \cdot 10^{-7}) \cdot (9 \cdot 10^{-7}) \cos \frac{\pi}{3} + (9 \cdot 10^{-7})^2}$$

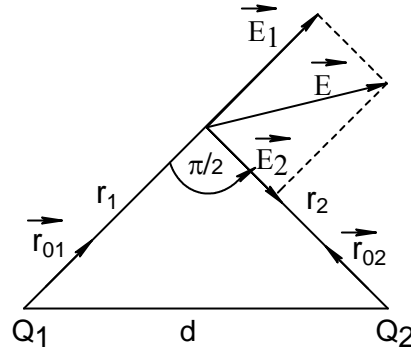
$$F = 15,57 \cdot 10^{-7} \text{ [N]}$$

6. Два електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1 = 6 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ и $Q_2 = -3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ се наоѓаат во воздух на меѓусебно растојание од $d = 5 \text{ cm}$. Да се определи векторот на јачината на електричното поле во точката која се наоѓа на растојание $r_1 = 4 \text{ cm}$ и $r_2 = 3 \text{ cm}$ од наелектризираните тела.

решение:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{r}_{01} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-11}}{(4 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{r}_{01} = 3,375 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \cdot \vec{r}_{01}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{r}_{02} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-3 \cdot 10^{-11})}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{r}_{02} = -3 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \cdot \vec{r}_{02}$$



Од растојанијата r_1 и r_2 се гледа дека триаголникот е правоаголен.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + 2 \cdot E_1 E_2 \cdot \cos(\vec{E}_1 \vec{E}_2) + E_2^2}$$

$$E = \sqrt{(3,375 \cdot 10^2)^2 + 2 \cdot 3,375 \cdot 10^2 \cdot (3 \cdot 10^2) \cdot \cos 90^\circ + (3 \cdot 10^2)^2}$$

$$E = \sqrt{20,4 \cdot 10^4} = 4,52 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

7. Во трите темиња на правоаголникот прикажан на сликата, со страни $a=10 \text{ cm}$ и $b=a\sqrt{2}$, се наоѓаат во воздух, три електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1=-10^{-10} \text{ C}$, $Q_2=2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ и $Q_3=3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Да се определи векторот на јачината на електричното поле во четвртото теме на правоаголникот.

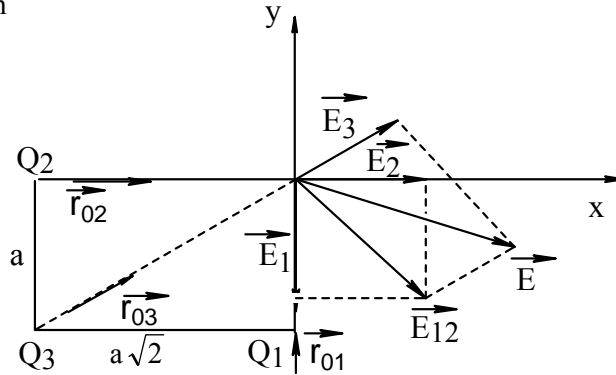
решение:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{a^2} \cdot \vec{r}_{01} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-10^{-10}}{(10 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{r}_{01} = -90 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \vec{r}_{01}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{b^2} \cdot \vec{r}_{02} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-10}}{(10\sqrt{2} \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{r}_{02} = 90 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \vec{r}_{02}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{a^2 + b^2} \cdot \vec{r}_{03} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\left(10 \cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(10 \cdot 10^{-2} \sqrt{2}\right)^2} \cdot \vec{r}_{03}$$

$$\vec{E}_3 = 90 \frac{V}{m} \cdot \vec{r}_{03}$$



$$E_{12} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{90^2 + 90^2} = 127,3 \frac{V}{m}$$

$$\operatorname{tg}(\vec{E}_2 \vec{E}_3) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{E}_2 \vec{E}_3) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = 35,3^\circ$$

$$E = \sqrt{E_{12}^2 + 2 \cdot E_{12} E_3 \cdot \cos(\vec{E}_{12} \vec{E}_3) + E_3^2}$$

$$E = \sqrt{127,3^2 + 2 \cdot 127,3 \cdot 90 \cdot \cos(35,3 + 45)^\circ + 90^2}$$

$$E = \sqrt{16205,3 + 22914 \cdot 0,168 + 8100} = 167,8 \frac{V}{m}$$

8. Два електрични полнежи со количества електрицитет $Q_1=50 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ и $Q_2=-20 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ се наоѓаат во воздух на меѓусебно растојание од 20 cm. Да се определи:

- потенцијалот во точката М која се наоѓа точно на средината помеѓу електричните полнежи
- потенцијалот во точката N која е оддалечена од полнежот со количество електрицитет Q_1 на растојание од 6 cm, а од полнежот со количес-

тво електрицитет Q_2 на растојание 10 cm.

в) работата која е потребна да се изврши за да се премести електричниот полнеж Q_1 во точката М.

решение:

$$\text{а) } V_M = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right)$$

$$V_M = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{50 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-2}} + \frac{-20 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$V_M = 9 \cdot 10^9 (5 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-7}) = 2700 [\text{V}]$$

$$\text{б) } V_N = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right)$$

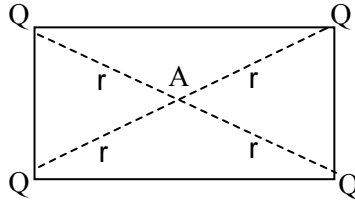
$$V_N = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{50 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{-20 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$V_N = 9 \cdot 10^9 (8,33 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-7}) = 5700 [\text{V}]$$

$$W = Q_1 \cdot E_1 \cdot r = Q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot r = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

$$W = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(50 \cdot 10^{-9})^2}{10 \cdot 10^{-2}} = 22,5 \cdot 10^{-5} [\text{J}]$$

9. Во темињата на правоаголник, во воздух, се наоѓаат електрични полнежи со количества електрицитет Q како на сликата. Страните на правоаголникот се со должини 8 cm и 6 cm. Потенцијалот во точката А која се наоѓа во пресекот на дијагоналите на правоаголникот изнесува 1,2 kV. Да се определи количеството електрицитет Q .



решение:

$$V_A = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \frac{Q_4}{r_4} \right)$$

$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q$$

$$r_1=r_2=r_3=r_4=r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{\sqrt{(8 \cdot 10^{-2})^2 + (6 \cdot 10^{-2})^2}}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05m$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4 \frac{Q}{r}$$

$$Q = V_A \cdot \pi\epsilon_0 r = 1200 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05$$

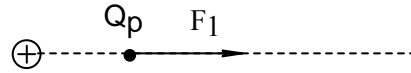
$$Q = 1667,34 \cdot 10^{-12} [C]$$

10 Точкаст електричен полнеж со радиус 2 nm, и количество електрицитет $Q=2 \cdot 10^{-8}$ C поставен е во сад со големи димензии. Во почетокот во садот бил вакуум, а потоа е наполнет со минерално масло, со релативна диелектрична константа $\epsilon_r=2,15$. Да се пресмета:

а) силата со која полето дејствува на пробното количество електрицитет $Q_p=2 \cdot 10^{-10}$ C во точката која е оддалечена од центарот на точкастиот електричен полнеж на растојание 20 cm.

б) јачината на полето и потенцијалот во таа точка пред и после полнењето на садот со масло.

решение:



$$a) F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q_p}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{(20 \cdot 10^{-2})^2} = 9 \cdot 10^{-7} [N]$$

$$б) E = \frac{F}{Q_p} = \frac{9 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 4500 \frac{V}{m}$$

$$V = E \cdot r = 4500 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 900 [V]$$

Ако садот е наполнет со масло ($\epsilon_r = 2,15$)

$$F' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{Q \cdot Q_p}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,15} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{(2 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$F' = 4,18 \cdot 10^{-7} [N]$$

$$E' = \frac{F'}{Q_p} = \frac{4,18 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 2090 \frac{V}{m}$$

$$V' = E' \cdot r = 2090 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 418 [V]$$